RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 febbraio 1917.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni.* Nota del Socio Gian Antonio Maggi.

Per la ragione, principalmente, che la formola in discorso serve di fondamento ad una ricerca, che formerà oggetto di una mia prossima Nota, mi permetto, con queste poche righe, di metterne in rilievo alcune circostanze, e di mostrarne l'utilità per la spedita deduzione di alcuni risultati. D'altronde, con questo, trova pure risposta la questione di derivabilità lungo una superficie, accennata da Somigliana, in fine alla seconda delle sue belle Note *Sulla teoria delle distorsioni elastiche* (1).

Intese $\varphi(s, n)$ e $\frac{\partial \varphi(s, n)}{\partial s}$ funzioni limitate e continue, in un campo, di cui il luogo $n = 0$ rappresenta un contorno (compreso il contorno medesimo), e indicato con $\lim_n$ il limite, col tendere di n a 0, per valori crescenti o decrescenti, si ha, in primo luogo,

$$\lim_n \frac{\partial \varphi(s, n)}{\partial s} = \frac{\partial \lim_n \varphi(s, n)}{\partial s}. \tag{1}$$

Questa formola traduce semplicemente l'eguaglianza

$$\left[\frac{\partial \varphi(s, n)}{\partial s}\right]_{n=0} = \frac{\partial \varphi(s, 0)}{\partial s},$$

(1) Questi Rendic., vol XVIII, 1ª sem. 1914; Nuovo Cimento, vol. XI, 1° sem. 1916.

sotto una forma opportuna per alcune questioni, colle qnali si trova certo ripetutamente adoperata.

Abbiasi ora una superficie regolare σ. Immaginiamo su questa superficie un doppio sistema di linee, atte a determinarne i punti, con le loro mutue intersezioni. Concepiamo i punti medesimi rappresentati per mezzo dei relativi parametri u, v, e indichiamo con s_1 e s_2 le misure degli archi delle stesse linee coordinate, aventi per origine un punto stabilito della linea, e per termine il punto considerato. Infine, immaginiamo un sistema di linee normali, in ogni punto, alla superficie σ, e indichiamo con n la misura dell'arco di questa linea, avente per origine il punto d'incontro della linea con la superficie, e per termine il punto generico.

Potremo allora intendere la posizione di ogni punto, P, dello spazio rappresentato per mezzo delle coordinate curvilinee u, v, n. La superficie σ sarà, per tal modo, rappresentata da $n = 0$. E $\lim_{n>0}$, $\lim_{n<0}$ significheranno il limite di una funzione del punto P, o delle coordinate u, v, n, col tendere di P ad un punto, P_σ, della superficie σ, — determinato dalle coordinate u, v — da una parte e dall'altra del pian tangente nel punto medesimo.

Supponiamo che una funzione del punto P

$$\varphi = \varphi(u, v, n)$$

e le sue derivate parziali fino a

$$\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}$$

siano limitate e continue dall'una *o* dall'altra parte della superficie σ. Varrà, in base a (1), l'una *o* l'altra delle due formole

$$(2)\qquad \lim_{n>0} \frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} \lim_{n>0} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}\ ,\quad \lim_{n<0} \frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} \lim_{n<0} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}\ .$$

Supposto poi che la funzione e le indicate sue derivate parziali siano limitate e continue dall'una *e* dall'altra parte di σ, dove presentino, per avventura, una discontinuità di prima specie, varrà l'una *e* l'altra delle (2), e posto, per brevità di scrittura,

$$\lim_{n>0} - \lim_{n<0} = \mathrm{D}\ ,$$

si avrà

$$(3)\qquad \mathrm{D}\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu}\mathrm{D}\varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}\ .$$

Si riconosce agevolmente come le stesse formole si verifichino, sostituendo s_1 e s_2 a u e v, con che a $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial u^\mu \partial v^\nu}$ si sostituisce $\frac{\partial^\mu}{\partial s_1^\mu}\frac{\partial^\nu}{\partial s_2^\nu}$.

Riferiamoci ora ad una terna d'assi cartesiani ortogonali x, y, z, e indichiamo con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, con $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i'$ e con ϱ_i (>0), dove i siano i valori 1 e 2, i coseni di direzione della tangente, volta nel senso in cui cresce la misura s_i dell'arco, i coseni di direzione della normale principale, volta verso il centro di curvatura, e il raggio di curvatura, nel punto (x, y, z) o $(u, v, 0)$, delle linee coordinate dell'uno e dell'altro sistema.

Abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\alpha_i + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\beta_i + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\gamma_i, \tag{4}$$

e rammentando

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i}\alpha_i', \quad \frac{\partial\beta_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i}\beta_i', \quad \frac{\partial\gamma_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i}\cdot\gamma_i',$$

con scrittura simbolica di manifesto significato,

$$\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\alpha_i + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\beta_i + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\gamma_i\right]^2 + \frac{1}{\varrho_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\alpha_i' + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\beta_i' + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\gamma_i'\right). \tag{5}$$

Supponiamo l'asse delle x tangente, nel punto considerato, alla superficie, e con questo rappresenti la tangente alla linea i, presa col senso indicato. Le formole (4) e (5) forniscono

$$\frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\alpha_i' + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\beta_i' + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\gamma_i'\right). \tag{7}$$

La (7) mostra che, per la derivata prima, si può sostituire la coordinata relativa ad un asse tangenziale all'arco di linea superficiale corrispondente: mentre le (8) e (9) mostrano che simile sostituzione non si può fare in generale, per le derivate di ordine superiore. Per cui, applicando le formole in discorso alle (2) o alla (3), si nota che, supposti gli assi x e y tangenziali, si può derivare lungo la superficie (lim φ o Dφ) per avere il limite, o il salto, di $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, ma non egualmente per avere il limite, o il salto, di $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$.

La (7) assume una forma particolarmente utile, supponendo che la linea i sia linea di curvatura della superficie, relativa al considerato punto, e che

l'asse delle z abbia la direzione della normale alla superficie, nel punto stesso, presa con un senso stabilito, per attribuire poi alla misura R_i del raggio di curvatura principale corrispondente il segno $+$ o il segno $-$, secondo che il relativo centro di curvatura si trova dalla parte positiva o negativa della normale medesima. Si ha, con questo, pel teorema di Meusnier,

$$\frac{\gamma_i'}{\varrho_i} = \frac{1}{R_i}.$$

Per cui la (8) diventa

$$(7') \qquad \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\alpha_i' + \frac{\partial}{\partial y}\beta_i'\right) + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{1}{R_i}.$$

Applichiamo le precedenti formole al caso di

$$(10) \qquad \varphi = \int_\sigma \frac{k\,d\sigma}{r}$$

« funzione potenziale di strato semplice », dove r rappresenta la distanza del punto P dello spazio dal punto generico della superficie σ, e k è supposta una funzione regolare di questo punto: cioè una funzione limitata, continua, e dotata delle derivate, rispetto alle coordinate cartesiane del punto, fino all'ordine che occorre considerare.

Basta supporre k limitata e continua, perchè φ ne risulti funzione limitata e continua di P, in tutto lo spazio: e supporre le derivate prime di k limitate e integrabili, perchè φ ammetta derivate prime, limitate e continue dalle due parti, separatamente, di σ. Si ha quindi, nella prima ipotesi,

$$(11) \qquad D\varphi = 0,$$

e, aggiungendovi la seconda, per (3), dove si faccia $\mu = 1$, $\nu = 0$, e (7) (relativa all'asse della x tangenziale)

$$(12) \qquad D\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.$$

Nelle stesse due ipotesi, per un risultato di Beltrami [1], recentemente richiamato e utilizzato da Somigliana [2], ogni derivata prima di φ si può rappresentare come somma di tre funzioni potenziali, di linea, relativa al contorno di σ, di strato semplice e di doppio strato, relative a σ; espres-

[1] *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. Neumann sulle funzioni potenziali.* Annali di Matematica pura e applicata (2), vol. X (1880).

[2] *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LI (1916).

sione che intanto fornisce, inteso che l'asse delle z abbia la direzione della normale a σ, nel punto considerato,

$$(13) \qquad D\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -4\pi k .$$

Ora, ammessa l'esistenza delle derivate seconde di k, con cui si forma la densità dell'accennato strato semplice, risulta dalla stessa espressione, per le ricordate proprietà generali della funzione potenziale di strato semplice, oltre di che, per le premesse ipotesi, in conseguenza delle note proprietà della funzione potenziale di doppio strato, che φ ammetterà derivate seconde, rispetto alle singole coordinate, limitate e continue, dalle due parti, separatamente, della superficie σ.

Tanto basta perchè possiamo applicare a (11) la (3), dove si faccia $\mu = 2$, $\nu = 0$, e s'introduca s_i. Otteniamo, supposti gli assi delle x e delle y tangenti alle linee di curvatura, nel punto considerato, per (7'), tenendo conto di (12) e di (13),

$$(14) \qquad D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi k}{R_1} \quad , \quad D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{4\pi k}{R_2} .$$

Dalle quali due relazioni, poichè, verificandosi dalle due parti di σ

$$\Delta_2 \varphi = 0 ,$$

si avrà

$$D\Delta_2 \varphi = 0 ,$$

si ricava

$$(15) \qquad D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi k \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Inoltre, applicando la (3), con $\mu = 1$, $\nu = 0$ (introdottovi s_i), alla (13), e valendosi della (6), si ottiene

$$(16) \qquad D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} = -4\pi \frac{\partial k}{\partial x} .$$

Per $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}$ giova riprendere le coordinate u, v. Si ha, con espressione simbolica, simile a quella adoperata in (5),

$$(17) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} .$$

E supposto che i tre sistemi di linee coordinate siano tra loro ortogonali, e che gli assi delle x e delle y rappresentino le tangenti alla linea 1 e alla linea 2, nel punto considerato,

$$(17)' \quad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} = \sqrt{EG}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}.$$

Nell'ipotesi che, inoltre, le linee coordinate siano formate colle linee di curvatura, risulta (1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Per cui, applicando a (11) la (3), dove si faccia $\mu = 1$, $\nu = 1$, nelle stesse ipotesi, e tenendo conto di (12), otteniamo

$$D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Tutte relazioni, codeste, che si trovano negli scritti testè ricordati.

In modo simile si possono agevolmente dedurre le relazioni analoghe, relative alla funzione potenziale di doppio strato

$$\varphi = \int_\sigma k\,\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,$$

valendosi semplicemente della relazione

$$D\varphi = 4\pi k.$$

(1) Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, Spoerri, 1902), Cap. IX, formole (I) (§ 55) e (14) (§ 62).

Chimica-fisica — *Sui cristalli misti.* Nota del Socio Carlo Viola.

I cristalli misti si possono considerare come miscele meccaniche, miscele fisiche o soluzioni solide. È strano ma non inopportuno che si venga a rivangare teorie antiche dei tempi di Rammelsberg, Tschermak, Mallard, Retgers ecc. quando la splendida teoria sulle soluzioni solide dapprima tentata da Lecoq de Boisbaudrand, indi sostenuta da van't Hoff e proseguita fino ad oggi, avesse portato a risultati insperati con gli studî ed esperienze di Roozeboom, Tammann, Bruni e altri. Le variazioni nell'energia totale e nell'energia interna che sogliono caratterizzare le soluzioni solide, come vorrebbe E. Sommerfeld, si ripetono eziandio nelle miscele meccaniche, purchè per la scissione dei componenti eterogenei di esse, occorra un consumo di lavoro. Anzi si può aggiungere che quando i singoli componenti di una miscela sono piccolissimi, tali da essere paragonabili con la lunghezza d'onda dei raggi visibili ($4 \times 10^{-5} - 8 \times 10^{-5}$ cm.), le miscele meccaniche non differiscono essenzialmente dalle soluzioni solide, tranne per l'esistenza in queste ultime della pressione osmotica e per il fenomeno della diffusione, che ne è la conseguenza. Ma come poi il fenomeno della diffusione in moltissimi cristalli misti è quasi impercettibile, e la forza osmotica non è misurabile praticamente con quantità conosciute, ne viene che la differenza è trascurabile od irrealizzabile con l'analisi termica. Questo cercai di dimostrare nella mia precedente Nota (1), ove rilevai ancora che le recenti esperienze sulla struttura dei cristalli dànno ragione di questo modo di vedere; poichè se la struttura dei cristalli consiste di sistemi punteggiati identici, nei cui nodi sono gli atomi o centri di essi, non le molecole, come si è ritenuto sempre, intercalati fra di loro, il cristallo stesso rappresenta uno stazionario stato omogeneo ed anisotropo, nel quale moti di traslazione sono esclusi. Giusta le dette esperienze le molecole esistenti nello stato amorfo, passando allo stato cristallino tanto si accostano, ossia si associano in un complesso omogeneo, che le loro distanze non sono diverse da quelle fra gli atomi, sicchè questi divengono gli individui del cristallo, come risulta precisamente dalle esperienze di Laue, Bragg e dalle considerazioni teoriche di Groth, mentre gli individui dello stato amorfo sono sempre le molecole, e da queste esso è determinato (2).

(1) C. Viola, R. Accademia dei Lincei, Rendiconti 1916, II, 286.

(2) Vedi a questo proposito A. E. H. Tutton, Zeit. f. Krystall. 1897, *27*, 266, che già allora parlava di *unità strutturale*, mentre G. Wyronboff, Bull. d. Soc. min. de Fr., 1906, *29*, 235, 354, sosteneva ancora la *particule crystalline*.

Le soluzioni solide invero sono state messe in paragone con i cristalli misti prima da Lecoq de Boisbaudrand, indi da van't Hoff; ciò ha permesso a H. W. Backhuis-Roozeboom [1] di spiegare i fenomeni della solubilità e della fusibilità dei cristalli misti, e l'equilibrio di essi con la fase amorfa secondo la legge delle fasi di Gibb. Ma la generalizzazione di questa teoria non era necessaria; la maggior parte dei cristalli misti, specialmence le miscele isomorfe non sono soluzioni, o se lo sono, questo fatto, non perchè tale, ma per le ragioni suesposte, non modifica le conclusioni, che si traggono dalle miscele — non soluzioni —.

***

Posto ciò possiamo esaminare le condizioni di equilibrio di contatto fra un cristallo misto così concepito e la fase amorfa, da cui esso trae origine. Il problema così posto è naturalmente risolvibile con gli stessi dati occorrenti per dimostrare la legge di Curie [2], secondo la quale gli accrescimenti perpendicolari alle facce di un cristallo sono proporzionali direttamente alle loro rispettive costanti capillari.

Esso è il seguente. Il cristallo misto in esame sia composto di due componenti, cioè di due cristalli in intimo contatto fra di loro fino nelle piccole parti. L'equilibrio di esso con la fase amorfa, nella quale si trovano gli stessi componenti, in generale in proporzione diversa da quella, in cui si trovano gli stessi componenti nel cristallo misto, avverrà quando in primo luogo la proporzione fra i due componenti non si alteri, pur variando la massa complessiva in corrispondenza con la legge delle fasi di Gibb; in secondo luogo quando l'energia superficiale sia minima in corrispondenza con la minima azione; ed in terzo luogo, vogliamo stabilire, quando il volume totale del cristallo misto non varii, ferma stando per tal modo la condizione che non vi sia nel sistema nè immissione nè emissione di energia calorifica. La sola variazione possibile è dunque nella forma.

Immaginiamo che il cristallo misto sia formato di particelle finissime del primo e del secondo componente. Le perpendicolari alle facce del cristallo misto, tirate da un centro O interno, attraverseranno strati del primo e del secondo componente. Sia p. es. p_r la distanza effettiva dal centro O ad una delle numerose facce costituenti il contorno di area s_r, la quale consterà di due parti, una di esse d'area s'_r appartenente al primo componente, l'altra di area s''_r appartenente al secondo. La distanza perpendicolare p_r consta anch'essa di due parti: p'_r, comprendente strati del primo componente, e p''_r comprendente strati del secondo, sicchè $p_r = p'_r + p''_r$ come

(1) Zeitschr. f. phys. Chemie, 1891, *8*, 531.
(2) C. Viola, R. Accademia dei Lincei, 1916, II, 401.

$s_r = s'_r + s''_r$. I volumi elementari dei due componenti sono rispettivamente

$$\frac{1}{3} p'_r s'_r \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} p''_r s''_r ,$$

e quindi i volumi totali:

$$(1) \quad \begin{cases} V' = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{r=n} p'_r s'_r & \text{del primo componente,} \\ V'' = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{r=n} p''_r s''_r & \text{» secondo » ;} \end{cases}$$

intendendo estese le sommatorie a tutte le facce $s'_1, s'_2, s'_3, \ldots, s'_n$ e rispettivamente $s''_1, s''_2, s''_3, \ldots, s''_n$ dei due componenti con le rispettive distanze perpendicolari $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots, p'_n$ e $p''_1, p''_2, p''_3, \ldots, p''_n$ a partire da un centro interno comune O.

Siano $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_n$ e rispettivamente $\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3, \ldots, \alpha''_n$ le costanti capillari delle suddette n facce dei due componenti; le tensioni superficiali totali saranno con ciò

$$(2) \quad \begin{cases} E' = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r s'_r & \text{del primo componente,} \\ E'' = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r s''_r & \text{» secondo » .} \end{cases}$$

Consideriamo ora una deformazione virtuale del cristallo misto, sotto l'azione della fase amorfa.

Facendo variare di δp_r la distanza perpendicolare $p_r = p'_r + p''_r$, si otterrà una variazione corrispondente $\delta s'_r$ dell'area s'_r e $\delta s''_r$ relative alla perpendicolare p_r, cosicchè le variazioni volumetriche elementari saranno:

$$(s'_r + \delta s'_r)\, \delta p'_r = s'_r\, \delta p'_r \quad \text{del primo componente,}$$

$$(s''_r + \delta s''_r)\, \delta p''_r = s''_r\, \delta p''_r \quad \text{» secondo » ,}$$

trascurando quantità piccole di secondo ordine.

Facendo la variazione totale del volume elementare, ossia

$$\delta \frac{1}{3} (p'_r s'_r) = \frac{1}{3} p'_r\, \delta s'_r + \frac{1}{3} s'_r\, \delta p'_r = s'_r\, \delta p'_r ,$$

si ottiene semplicemente

$$s'_r\, \delta p'_r = \frac{1}{2} p'_r\, \delta s'_r \quad \text{per il primo componente,}$$

$$s''_r\, \delta p''_r = \frac{1}{2} p''_r\, \delta s''_r \quad \text{» secondo » .}$$

Nel considerare una piccolissima deformazione del cristallo per effetto del contatto con la fase amorfa, una sola ipotesi è giustificata, cioè che avvenga una variazione di volume, rimanendo inalterato il rapporto fra i due componenti, come si è sopra osservato, poichè si suppone che l'equilibrio stabile secondo la legge delle fasi di Gibb sia pienamente raggiunto.

Questa ipotesi, per le cose sopradette, porta naturalmente all'equazione:

$$\sum_{r=1}^{r=n} p'_r \, \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} p''_r \, \delta s''_r = 0 .$$

Consideriamo analogamente le variazioni parziali delle tensioni superficiali, dovute alle stesse variazioni delle aree $\delta s'_r$ e $\delta s''_r$; otterremo:

$$\delta E' = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r \, \delta s'_r \quad \text{del primo componente,}$$

$$\delta E'' = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r \, \delta s''_r \quad \text{» secondo » .}$$

Dalla loro somma risulterà la variazione totale dell'energia superficiale del cristallo misto, la quale dovrà annullarsi per l'equilibrio stabile del sistema, vale a dire si avrà

$$\sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r \, \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r \, \delta s''_r = 0 .$$

Le due equazioni come condizione dell'equilibrio del cristallo misto in contatto con la fase amorfa nella supposizione che non vi sia nè emissione nè immissione di calore, sono dunque le seguenti:

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=n} p'_r \, \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} p''_r \, \delta s''_r = 0 \\ \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r \, \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r \, \delta s''_r = 0 . \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda di queste equazioni per una costante $-C$ da determinarsi, e sommata alla prima, si ottiene

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} (p'_r - C\alpha'_r) \, \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} (p''_r - C\alpha''_r) \, \delta s''_r = 0 .$$

Le variazioni $\delta s'_r$ e $\delta s''_r$, come ancora $\delta p'_r$ e $\delta p''_r$ non sono fra loro indipendenti; infatti le concentrazioni dei due componenti sono determinati, tale essendo la condizione nell'equilibrio di contatto. Potremo dunque stabilire il rapporto, costante, almeno entro certi limiti,

$$(5) \qquad \delta s''_r = c_r \, \delta s'_r \qquad r = 1 , 2 , 3 , \ldots , n ,$$

mediante il quale la (4) diventa

$$(6) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} \left\{ (p'_r - C\alpha'_r)\,\delta s'_r + (p''_r - C\alpha''_r)\,c_r\,\delta s'_r \right\} = 0,$$

ove tutte le variazioni $\delta s'_r$, $r = 1, 2, 3 \ldots n$, sono fra loro indipendenti, o possono considerarsi tali, sino a quantità piccole di secondo ordine. Per tal modo le (6) si scindono nelle n condizioni seguenti:

$$(7) \qquad (p'_r + p''_r\,c_r) = C(\alpha'_r + \alpha''_r\,c_r) \quad r = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Vale a dire: *gli accrescimenti medi, perpendicolari alle facce del cristallo misto sono proporzionali direttamente alle costanti capillari medi dei due componenti.*

Da qui segue la regola: *La figura normale di un cristallo misto, è una media delle figure normali dei cristalli che lo compongono nel rapporto, in cui essi si trovano nel cristallo misto* (Analogia della legge di Curie).

Fin qui abbiamo considerato che $\delta s'_r$ e $\delta s''_r$ siano dello stesso segno; ma ciò non è assolutamente necessario. Possiamo all'incontro sostituire alle (5) il rapporto

$$(5_a) \qquad \delta s''_r = -\,c_r\,\delta s'_r,$$

con la quale in luogo della (6) si ottiene:

$$(8) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} \left\{ (p'_r - C'\alpha'_r)\,\delta s'_r - (p''_r - C'\alpha''_r)\,c_r\,\delta s'_r \right\} = 0$$

e in luogo delle (7) le condizioni di equilibrio:

$$(9) \qquad (p'_r - p''_r\,c_r) = C'(\alpha'_r - \alpha''_r\,c_r), \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Moltiplicando le (7) e le (9) per s'_r, col riguardo delle (5) e (5_a), si deduce

$$(10) \qquad p'_r\,s_r + p''_r\,s''_r = C(\alpha'_r\,s'_r + \alpha''_r\,s''_r)$$
$$(11) \qquad p'_r\,s_r - p''_r\,s''_r = C'(\alpha'_r\,s'_r - \alpha''_r\,s''_r) \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Dando ad r tutti gli indici $1, 2, 3, \ldots, n$, quante sono le facce in esame, indi sommando tutte le analoghe alle (10), e alla lor volta tutte le analoghe alle (11), si ottengono le relazioni seguenti:

$$(12) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} p'_r\,s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} p''_r\,s''_r = C \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r\,s'_r + C \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r\,s''_r,$$

ovvero

$$\sum_{r=1}^{r=n} p'_r s'_r - \sum_{r=1}^{r=n} p''_r s''_r = C' \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r s'_r - C' \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r s''_r . \tag{13}$$

ossia, in virtù delle (1) e (2),

$$\begin{cases} V' + V'' = C(E' + E'') \\ V' - V'' = C'(E' - E''). \end{cases} \tag{14}$$

La prima di queste due relazioni esprime semplicemente la legge di Curie [1], ossia:

La totale energia superficiale è sempre proporzionale direttamente al volume totale del cristallo misto.

La seconda dice:

La differenza delle energie superficiali dei componenti è proporzionale direttamente alla differenza dei volumi, in ogni istante dell'accrescimento, qualunque sia d'altronde il rapporto fra i componenti del cristallo misto.

Se è interessante questo risultato che in ogni istante e per qualsivoglia rapporto di concentrazione la differenza delle energie superficiali è proporzionale alla differenza dei volumi dei rispettivi componenti, di gran lunga più importante è il fenomeno se i componenti si mescolano in proporzione di volumi eguali, ossia

$$V = V'' .$$

[1] La relazione di Curie (C. Viola, R. Accademia dei Lincei. Rendiconti, II, 401)

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \ldots : \alpha_n \tag{1}$$

moltiplicata membro a membro rispettivamente per $s_1 . s_2 . s_3 . \ldots . s_n$, ed eseguitane la somma, dà appunto

$$\sum_{r=1}^{r=n} p_r s_r = C \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r s_r .$$

Il termine a sinistra è proporzionale direttamente al volume del cristallo V, il termine a destra è l'energia superficiale E, sicchè

$$V = CE . \tag{2}$$

Segue la legge di Curie espressa nella relazione (1), comunemente così conosciuta, riceve la forma (2), ossia: *L'energia superficiale del cristallo è proporzionale direttamente al suo volume, in ogni istante del suo accrescimento.* È naturale che le due forme della stessa legge abbiano lo stesso contenuto: infatti se l'accrescimento del cristallo non avvenisse secondo la (1), in uno stato riversibile, non potrebbe verificarsi la (2); e viceversa se la (2) non fosse soddisfatta, l'accrescimento non avverrebbe secondo la (1), e l'equilibrio stabile di contatto sarebbe rotto.

perchè in tale caso le energie superficiali sono pure eguali,

$$E' = E'',$$

come si trae dalla (14).

La *miscibilità media*, che per semplicità così chiamerò quella determinata da volumi eguali dei componenti, eguali essendo allora le energie superficiali, dovrebbe essere il carattere fondamentale della miscibilità continua entro limiti di due cristalli, poco monta se le miscele siano meccaniche, fisiche o soluzioni solide.

Rappresentino precisamente V' e V'' i volumi molecolari: e si tratti di due componenti aventi i volumi molecolari così vicini fra di loro che possono ritenersi eguali: ammessa la miscibilità media fra i due, il risultato è il seguente: le stesse energie superficiali si trovano negli stessi volumi molecolari. E poichè le costanti capillari sono proporzionali inversamente alle densità superficiali, risulterà ancora che i due componenti a eguali volumi molecolari hanno la stessa struttura e in tutte le corrispondenti facce la stessa densità. Non si potrebbe immaginare una analogia più completa di questa ora considerata, ove due componenti godono della miscibilità continua entro limiti intorno alla miscibilità media. E tale essendo questa analogia sarebbe allora opportuno di fondare su questo spiccato carattere la definizione dell'isomorfismo, ossia:

I cristalli isomorfi hanno la stessa struttura e la stessa densità superficiale e perciò godono della miscibilità continua entro limiti, compresa la miscibilità media, e viceversa.

Ma conviene subito notare che i corpi, per quanto analoghi, non hanno volumi molecolari eguali: naturalmente trattasi di corpi allo stato libero. Se all'incontro, essi allo stato legato, si trovano ad avere volumi eguali dimostrata dalla miscibilità media, discende da questo fatto che i due componenti subiscono variazione ossia contrazione e rispettivamente dilatazione. Si viene per tal modo a sollevare, non volendo, una questione, rimasta controversa per un lato seguendo Retgers [1] col principio esagerato della additività per l'altro seguendo Gossner col principio della modificazione [2]. La miscibilità continua entro limiti compresa la miscibilità media ne dà appunto la possibilità.

Se dunque componenti allo stato legato si contraggono e rispettivamente si dilatano, la densità dell'uno cresce, dell'altro diminuisce, e i volumi molecolari eguali corrispondono precisamente ai pesi molecolari dei due componenti. La miscibilità media avviene dunque in proporzione dei pesi molecolari. Se questa è possibile i due corpi sono isomorfi, escluso il caso

(1) J. Retgers, op. cit.

(2) B. Gossner, *Ueber Isomorphie*, Zeit. f. Krystall., 1907, *43*, 130.

naturalmente che non si presenti una combinazione in proporzione stechiometrica esatta come nei sali doppî. essendo allora impossibile la miscibilità in tutte le proporzioni intorno a detta combinazione.

La miscibilità in tutte le proporzioni è stato sempre il punto più critico della teoria dell'isomorfismo; Retgers (1) nel 1889 dimostrò l'esistenza di lacune nella miscibilità fra sostanze ritenute miscibili in tutte le proporzioni e perciò isomorfe. E dopo Retgers i corpi che si mescolano in proporzioni continue con lacune si sono presentati a centinaia a misura che le ricerche si intensificarono. Invero Groth (2) continuò a ritenere che due isomorfi devono poter mescolarsi in tutte le proporzioni senza lacune, ovvero distinse in seguito isomorfi assoluti e isomorfi relativi; ma Gossner (3) non fu dello stesso avviso, ed estese la definizione dell'isomorfismo a sostanze miscibili in tutte le proporzioni entro limiti separati da lacune. Ognun scorge però in questa definizione una grande indeterminatezza, e Wallerant (4) osservò giustamente a tale proposito: « Queste considerazioni ci conducono « a mettere in rilievo un errore nel quale, mi sembra, incorsero parecchi « autori; essi nell'intento di accertarsi se due corpi siano isomorfi, fecero « cristallizzare una soluzione di questi corpi, ed ottennero cristalli di un « corpo, nei quali l'analisi dimostrò piccolissime quantità dell'altro; con- « clusero allora trattarsi di cristalli misti fra limiti molto ristretti, mentre « in realtà uno di essi non è che impurità dell'altro ».

* * *

A me pare che non si uscirà dalla indeterminatezza, se non si includerà nella definizione dell'isomorfismo la *miscibilità media*, ossia la miscibilità continua entro limiti comprendente la miscibilità nelle proporzioni dei pesi molecolari dei due componenti; senza di questo carattere l'isomorfismo perde la sua vera base, e sotto il suo nome potrebbero riunirsi corpi cristallizzati, che non hanno la più piccola analogia fra di loro. E si comprende che così deve essere, poichè quanto più sono lontani fra di loro i volumi molecolari di due corpi miscibili, tanto meno è possibile la contrazione e dilatazione per dar luogo alla miscibilità media. Qualche esempio, credo, potrà chiarire la questione.

I due sali $Mg\,SO_4 + 7\,aq$ e $Fe\,SO_4 + 7\,aq$ sono stati i primi cristalli isomorfi, dove Retgers (5) scoperse lacune nella loro miscibilità in tutte le

(1). I. W. Retgers, Zeitschr. f. phys. Chem. 1889, *3*, 552.

(2) P, v. Groth, Einleitung in die chemische Krystallographie, 1904.

(3) B. Gossner, *Beiträge zur Kenntniss des Isomorphismus*. Zeit. f. Kryst., 1903, *44*, 417.

(4) F. Wallerant, Fortschritte f. Min. etc. 1912, vol. II, 74.

(5) J. Retgers, *Beiträge zur Kenntniss des Isomorphismus*. Zeit. f. phys. Chemie, 1889, *3*, 534; *4*, 617.

proporzioni, il primo cristallizzando ordinariamente nella classe bisfenoidale-trimetrica (Epsomite) col peso specifico 1,677; il secondo nella classe prismatico-monoclina (Vitriolo di ferro) col peso specifico 1,898.

Il sale magnesiaco nello stato metastabile cristallizza anche nel monoclino, come il corrispondente sale ferroso, ed allora ha il peso specifico 1,691, secondo le deduzioni di Retgers in base al principio della additività. Ora è dimostrato che i cristalli misti $(Mg\ Fe)\ SO_4 + 7\ aq$ in modificazione monoclina contengono del sale di magnesio in tutte le proporzioni da 0 a 54 % in peso, e rispettivamente del sale ferroso da 100 % a 46 %.

La *miscibilità media* di detti sali cade precisamente in questo intervallo; infatti per volumi eguali di entrambi, il sale magnesiaco corrisponde a 47.00 % in peso e il sale ferroso a 53,00 %, tenuto conto dei loro pesi specifici allo stato libero. Si conclude perciò che essendo la miscibilità media di essi possibile nella modificazione monoclina, essi hanno necessariamente eguale struttura e perciò sono isomorfi.

Non così va la bisogna per i due sali nella modificazione trimetrica, che è stabile per il sale magnesiaco e instabile e forse irriversibile per il sale ferroso. Secondo le deduzioni di Retgers il sale ferroso in questa modificazione dovrebbe avere il peso specifico di 1,875.

La miscibilità in tutte le proporzioni va da 0 % a 19 % per il sale ferroso, e rispettivamente da 100 % a 81 % per il sale magnesiaco. La miscibilità media non è possibile, essa esce da questo intervallo; infatti la proporzione corrispondente a 47.00 % in peso del sale magnesiaco e a 53,00 % del sale ferroso, tenuto conto dei relativi pesi specifici; segue da ciò che i due sali ferroso e magnesiaco della modificazione trimetrica non hanno eguale struttura e non sono perciò isomorfi.

Un secondo esempio di miscibilità in tutte le proporzioni e con lacune ci offre lo stesso Retgers [1] fra le numerose coppie di corpi, che egli studiò. I due sali sono $Na\ NO_3$ e $Ag\ NO_3$.

La modificazione stabile del sale $Na\ NO_3$ appartiene alla classe scalenoedrico-trigonale come la calcite; quella stabile del sale $Ag\ NO_3$ appartiene alla classe bipiramidale-trimetrica col peso specifico 4.35. Il sale di argento cristallizza ancora in una modificazione instabile appartenente alla classe scalenoedrico-trigonale, come il primo sale, col peso specifico 4,19; mentre non è nota una seconda modificazione del sale sodico, nè stabile nè instabile.

La miscibilità in tutte le proporzioni dei due sali è possibile propriamente solo nella modificazione trigonale ed è diversa per le singole temperature. Alla temperatura di 138° C. essa va dal 0 % al 52 % in peso del sale argentico e rispettivamente dal 100 % al 48 % del sale sodico; alla

[1] J. W. Retgers, op. cit.

temperatura di 15° C. va rispettivamente dal 0 % al 64,4 % in peso del sale argentico e dal 100 % al 35,6 % del sale sodico.

Invero una certa miscibilità sembra possibile anche nella modificazione trimetrica dei due sali, benchè non si conosca la modificazione corrispondente del sale sodico. Infatti Retgers ottenne cristalli misti di questa modificazione dal 0 % al 1,6 % del sale sodico e rispettivamente dal 100 % al 98,4 % del sale argentico alla temperatura di 138° C., e dal 0 % al 4,5 % del sale sodico alla temperatura di 15°. Probabilmente quest'ultima miscibilità presunta di Retgers non è che impurità di Vallerant.

In conclusione la lacuna esistente nella miscibilità di questa coppia di sali va dal 52 % al 98,4 % del sale argentico e rispettivamente dal 48.8 % al 1,6 % del sale sodico per la temperatura di 138° C.; e dal 64,4 % al 95,5 % del sale argentico per la temperatura di 15°.

La *miscibilità media* all'incontro corrisponde a 33.40 % in peso del sale sodico e rispettivamente a 66,6 % in peso del sale argentico. tenuto conto che il peso specifico del sale sodico è 2,271 e quello del sale argentico 4,19 allo stato libero: essa è vicinissima alla miscibilità osservata di 35.6 % del sale sodico per la temperatura di 15°. ma ne è lontana dal limite 48 % per la temperatura di 138°.

Dato che la lacuna si restringe col discendere della temperatura da 138° a 15°. si potrebbe concludere che a più bassa temperatura la miscibilità media non sia compresa nella lacuna. e che perciò i due sali $AgNO_3$ e $NaNO_3$ siano isomorfi nella modificazione trigonale. e solo in questa. Ma alzandosi la temperatura i volumi molecolari tanto si scostano l'uno dall'altro che la miscibilità media riesce impossibile. L'esempio è istruttivo poichè dimostra che se due corpi non appariscono isomorfi a una certa temperatura. mancandovi il carattere sperimentale riconoscibile. lo possono tuttavia essere a temperatura molto diversa da quella osservata.

Apparisce intanto da queste considerazioni un fatto importante che se due corpi sono isomorfi in una modificazione. non lo possono essere in un'altra. Ammenochè le differenti modificazioni di detti corpi non comprendano la miscibilità media (1); tanto si dica della coppia $AgNO_3$ e $NaNO_3$ quanto della coppia precedente: cosicchè la definizione della morfotropia di Groth dovrebbe essere un po' più allargata, e quella dell'isodimorfismo un po' più ristretta. limitando il principio delle soluzioni solide solo a miscibilità piccolissime.

Gossner (2) sperimentò varie sostanze miscibili in tutte le proporzioni con lacune. I due sali KCl e $(NH_4)Cl$ ritenuti isomorfi. sono miscibili in

(1) A. Steger, Zeitschr. f. phys. Chemie. 1903, *43*, 595.

(2) B. Gossner, *Untersuchung polymorpher Körper*. Zeit. f. Kryst. 1903, *38*, 110 e B. Gossner, Zeitschr. f. Kry. 1908, *44*, 491.

quantità molto limitate formando da un lato cristalli aventi la figura del sale KCl con pochissima quantità di NH_4Cl, dall'altra cristalli aventi la figura del sale NH_4Cl con pochissima quantità di KCl. Secondo quanto abbiamo qui esposto i due cloruri non possono essere considerati isomorfi, nè quelli con la modificazione di KCl, nè quelli con la modificazione di NK_4Cl. Chi li vuole isomorfi ad ogni costo esce dal campo sperimentale, ed entra in un campo ipotetico come il Groth, ritorcendo la miscibilità continua ma piccolissima a vantaggio di idee aprioristiche, che nel campo della lacuna la miscibilità è possibile, ma le modificazioni che vi prendono parte sono così labili, che esulano dalle osservazioni. La stessa cosa può ripetersi per alcuni sali di K e NH_4 apparentemente analoghi. Altrettanto debba ritenersi per la coppia NaCl e KCl, se si tien conto della loro struttura.

***

Fissato il principio che l'isomorfismo di due corpi premette la miscibilità media nel campo della miscibilità in tutte le proporzioni con o senza lacune fuori di questo campo, è conseguenza inerente a questo principio che per volumi eguali di due corpi isomorfi le energie superficiali sono eguali come sono eguali le loro strutture.

Posto ciò e dato che le costanti capillari sono inversamente proporzionali alle densità superficiali, segue che *i corpi isomorfi non solamente hanno la stessa struttura, ma ancora allo stato legato hanno lo stesso numero di atomi o di gruppi di atomi vicarianti nello stesso volume a temperatura e pressione data.*

Quando i corpi si trovano allo stato libero, i loro volumi elementari sono conosciuti; essi sono infatti i volumi molecolari, nel supposto che allo stato amorfo essi abbiano la stessa molecola con lo stesso numero di atomi o gruppi di atomi vicarianti.

Ecco per esempio i pesi specifici (Ps), i pesi molecolari (M) e i volumi molecolari (V) per le sostanze sopra considerate allo stato libero, ritenute isomorfe:

	Ps	M_1 e M_2	V_1 e V_2	$\frac{1}{2}(V_1 + V_2)$
$MgSO_4 + 7aq$	1,691	247,072	146,11	143,815
$FeSO_4 + 7aq$	1,898	278,612	141,52	
$NaNO_3$	2,271	85,09	37,60	39,03
$AgNO_3$	4,190	169,97	40,46	

Da questi esempî e da altri che si potrebbero facilmente aggiungere, risulta che i corpi ritenuti isomorfi nel senso sopra indicato, non hanno allo stato libero volumi eguali per lo stesso numero di atomi o gruppi di essi.

La conclusione che dobbiamo trarre da queste considerazioni è che in generale i corpi isomorfi nel formare cristalli misti si contraggono o si dilatano, come si è sopra detto. nel senso di ottenere come risultato finale volumi eguali per lo stesso numero di atomi o gruppi di essi, non importa se i cristalli misti siano soluzioni o no (1). Di quanto essi si contraggono o rispettivamente si dilatano, è questo un problema, che richiede altre esperienze. Non andiamo però molto lontani dal vero, supponendo i volumi elementari di due isomorfi allo stato legato siano eguali alla media aritmetica dei volumi elementari di detti isomorfi allo stato libero nel caso di miscibilità media.

Posto V_1 e V_2, i volumi elementari di due isomorfi allo stato libero. Attesa la miscibilità media i volumi eguali dei due componenti si portano con ciò al valore $V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$. Da qui viene che il componente di volume maggiore V_1 si contrae nella proporzione seguente nello stato legato:

$$\varepsilon_1 = \frac{V_1 + V_2}{2V_1};$$

il componente di volume minore V_2 si dilata nella proporzione seguente:

$$\varepsilon_2 = \frac{V_1 + V_2}{2V_2}.$$

Nei sopra citati gruppi isomorfi i coefficienti di contrazione e di dilatazione ε_1 ed ε_2 sono i seguenti:

$\varepsilon_1 = 0{,}984$	per il	componente	$Mg\,SO_4 + 7\,aq$
$\varepsilon_2 = 1{,}016$	»	»	$Fe\,SO_4 + 7\,aq$
$\varepsilon_1 = 0{,}974$	»	»	$Ag\,NO_3$
$\varepsilon_2 = 1{,}038$	»	»	$Na\,NO_3$

È inoltre naturale che le contrazioni e dilatazioni si ripartiscono diversamente nel cristallo, se diverse sono le concentrazioni.

Posto p_1 % il peso di un componente del cristallo misto, e p_2 % quello dell'altro, essendo $p_1 + p_2 = 100$, sarebbe naturale supporre che le contrazioni e le dilatazioni di essi, ε_1' e ε_2', fossero proporzionali inversamente ai volumi $v_1 = \frac{p_1}{s_1}$ e $v_2 = \frac{p_2}{s_2}$, essendo s_1 ed s_2 i loro pesi specifici allo stato libero; ossia stabilire

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 \frac{v_2}{(V_2)} \quad \text{e} \quad \varepsilon_2' = \varepsilon_2 \frac{v_1}{(V_1)},$$

(1) B. Gossner, op. cit. Vedi anche E. Mallard, Bull. Soc. Min. d. France, 1886, *9*, 120.

essendo

$$(V_1) = \frac{100}{M_1 + M_2} V_1 \quad \text{e} \quad (V_2) = \frac{100}{M_1 + M_2} V_2;$$

perchè il componente in predominanza deve esercitare maggiore compressione sull'altro, che questo su quello.

In questo senso sarebbero corrette le tabelle dei pesi specifici di Gossner — per i componenti allo stato legato — ed i pesi specifici dei cristalli misti calcolati da Retgers.

Chimica. — *Sopra l'ossidazione della fenilazocarbonammide* [1]. Nota del Socio A. Angeli.

Nella Nota precedente, sopra gli acidi azocarbonici, pubblicata nei Rendiconti dello scorso mese, ho accennato che l'ammide di Oscar Widman [2]:

$$C_6H_5.N = N.CO.NH_2$$

per ossidazione con acqua ossigenata in soluzione acetica, addiziona nettamente un atomo di ossigeno, come fanno tutti gli azoderivati, per dare un prodotto che probabilmente si doveva considerare come uno dei due azossicomposti corrispondenti alla forma:

$$C_6N_5.(N_2O).CO.NH_2.$$

Le ulteriori esperienze che ho eseguite hanno dimostrato che la mia previsione era esatta.

Per preparare il nuovo prodotto, che rappresenta il primo derivato di un acido azossicarbonico:

$$C_6H_5.(N_2O).COOH$$

che finora si conosca, si sciolgono a caldo 8 gr. dell'ammide di Widman in 30 cc. di acido acetico ed alla soluzione così ottenuta si aggiungono 10 cc. di acqua ossigenata al 30 % (peridrol Merck). Il liquido, intensamente colorato in rosso bruno, viene tenuto per circa una settimana alla temperatura di 40-45°, riscaldando il bagno dalle 8 del mattino alle 7 della sera. Dopo questo tempo la colorazione del liquido, che presenta ancora le reazioni dell'acido peracetico, ha diminuito notevolmente di intensità ed appare rosso aranciata. Per ricavare il prodotto che si è formato, si può versare il liquido in grandi vetri da orologio che si pongono nel vuoto, a

[1] Lavoro eseguito nel R. Laboratorio per le sostanze esplosive in Roma.
[2] Berliner Berichte, *28* (1895), 1927.

temperatura ordinaria, sopra calce: il solvente si evapora e rimane indietro una massa cristallina giallognola.

Oppure si può versare il liquido in circa 200 cc. di acqua; si separa una massa cristallina aranciata, semisolida che viene raccolta su filtro e seccata nel vuoto; il liquido acquoso si estrae con etere e lo strato etereo si lava con carbonato sodico allo scopo di togliere la maggior parte dell'acido acetico. Non bisogna però impiegare eccesso di carbonato, perchè questo può decomporre il prodotto che sta sciolto. Per evaporazione del solvente si ottiene una nuova quantità di sostanza che si riunisce alla prima. Per la purificazione, il prodotto secco nel vuoto, viene bollito un paio di volte con poco benzolo, nel quale anche a caldo è poco solubile. In tal modo rimane sciolta nel benzolo una piccola quantità di un olio giallo, che ha odore di nitrobenzolo, che poi si rapprende in una massa cristallina che non ho ancora esaminato. Non è improbabile che sia costituito del secondo isomero preveduto dalla teoria. Il prodotto rimasto insolubile in benzolo a freddo, si può ricristallizzare da acqua bollente, nella quale è abbastanza solubile, impiegando piccola quantità di nero animale, allo scopo di eliminare una traccia di resina che trattiene. Dopo un paio di ricristallizzazioni si ottengono magnifici aghi splendenti, lunghi qualche centimetro, lievemente colorati in bianco giallognolo. Fondono nettamente a 151°, con debole sviluppo gassoso. Il prodotto si può anche purificare da molto benzolo bollente; anche in questo caso si separa sotto forma di aghi che appariscono quasi bianchi, perchè più sottili, e che fondono alla stessa temperatura. Il prodotto è molto solubile in alcool ed acetone; poco solubile in etere a freddo.

La sostanza seccata nel vuoto diede all'analisi i seguenti numeri:

gr. 0,1135 di sostanza fornirono cc. 24,3 di azoto a 11° e 759 mm.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_7H_7N_3O_2$
N	25,70	25,45

La combustione deve venire eseguita con molta cautela perchè la sostanza cede con grande facilità la maggior parte del suo azoto quando le fiamme sono ancora molto lontane.

Il prodotto bollito con acido solforico al 25 % passa prima in soluzione e poi si decompone con forte sviluppo di azoto; nello stesso tempo si forma fenolo.

Evidentemente per tale trattamento l'ammide viene dapprima saponificata e l'acido fenilazossicarbonico che si forma:

$$C_6H_5.(N_2O).COOH$$

a caldo, perde anidride carbonica per dare solfato di fenildiazonio, che suc-

cessivamente si decompone nel solito modo. All'acido solforico più diluito e bollente, presenta una maggiore resistenza, tanto che anche dopo riscaldamento prolungato di alcuni minuti, per raffreddamento ricristallizza in gran parte inalterata. Nell'acido solforico concentrato a freddo si scioglie con colorazione giallo bruna, ma senza sviluppo gassoso. Dopo qualche tempo, per aggiunta di acqua, il liquido presenta le reazioni dei sali di fenildiazonio.

La fenilazossicarbonammide è invece molto sensibile all'azione degli alcali ed anche dei carbonati alcalini.

La soluzione acquosa, per ebollizione con β-naftolo, si mantiene incolora; ma se si aggiunge qualche goccia di carbonato sodico al liquido bollente, esso si colora immediatamente in rosso scarlatto, in seguito a formazione di benzolazonaftolo. Lo stesso si verifica per azione degli idrati alcalini. Aggiungendo all'ammide qualche goccia di potassa essa passa in soluzione; riscaldando il liquido si svolge ammoniaca (1).

Dopo raffreddamento, la soluzione per trattamento con β-naftolo fornisce immediatamente benzolazonaftolo purissimo. Versando sopra l'ammide potassa metilica, essa passa del pari in soluzione con lieve sviluppo gassoso; aggiungendo etere si separano cristalli gialli che con β-naftolo si comportano nell'identico modo.

Che veramente si tratti dell'azossicomposto corrispondente all'ammide di Widman, viene provato dal fatto che per moderata riduzione il primo si può nuovamente trasformare nella seconda, come si dirà più avanti.

Siccome la fenilazocarbonammide di partenza rappresenta un azoderivato asimmetrico, come ho dimostrato nei precedenti lavori, ad essa corrispondono due azossicomposti isomeri:

$$C_6H_5.N=N.CO.NH_2$$
$$\quad\quad\quad

rispetto all'azione del bromo; come risulta infatti da tutte le esperienze eseguite, dei due isomeri:

$$C_6H_5.N=N.R \quad (O)$$

$$C_6H_5.N=N.R \quad (O)$$

solamente il secondo per azione di questo metalloide, fornisce il *p*-bromo-derivato:

$$Br.C_6H_4.N=N.R \quad (O)$$

mentre invece il primo rimane inalterato. Ora, l'azossiammide da me preparata, trattata con bromo, senza impiego di solvente, a temperatura ordinaria, rimane indifferente all'azione dell'alogeno e perciò, delle due possibili, ad essa spetta la forma:

$$C_6H_5.N=N.CO.NH_2 \quad (O)$$

Il composto, come si vede, è anche isomero con la nitrosammina della fenilurea:

$$C_6H_5.N(CO.NH_2)-N \quad (O)$$

preparata da Walther e Wlodkowski (1); questa fonde a 95°, è molto alterabile e bollita con acqua fornisce facilmente azoto e fenolo. La fenilazossicarbonammide è molto stabile, e come si è detto, si purifica benissimo ricristallizzandola dall'acqua bollente.

Per trasformare l'azossiammide nel prodotto di partenza, vale a dire nella fenilazocarbonammide di Widman, la si scioglie a freddo in etere; è necessario impiegare molto solvente data la sua piccola solubilità ed il liquido si versa sopra un po' di amalgama di alluminio. Si nota un lieve sviluppo d'idrogeno e quando la riduzione è compiuta, a temperatura ordinaria, si filtra il liquido incoloro nel quale si aggiunge poco per volta ossido di mercurio preparato di recente e secco. Le prime porzioni dell'os-

(1) Journal f. pr. Chemie, (2), *59*, 282.

sido vengono prontamente ridotte e quando il giallo dell'ossido rimane persistente si filtra di nuovo e si evapora la soluzione che da incolora è diventata gialla. Rimane indietro una massa cristallina, di colore aranciato, che purificata dall'acqua bollente fonde nettamente a 114° e che possiede tutti i caratteri dell'ammide di Widman. Per riduzione dunque l'azossiderivato ha perduto nettamente l'atomo di ossigeno che si era addizionato per azione dell'acqua ossigenata all'ammide; questo fatto, che porta una nuova conferma alla formula di struttura da me assegnata alla sostanza, dimostra anche che la trasformazione è invertibile, nel senso rappresentato dallo schema:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \\ \dot{N} \\ \| \\ \dot{N} \\ \dot{C}O.NH_2 \end{array} \rightleftarrows \begin{array}{l} C_6H_5 \\ \dot{N}=O \\ \| \\ \dot{N} \\ \dot{C}O.NH_2 \end{array}.$$

Per quanto riguarda la struttura dell'idrato del diazocomposto che in una prima fase si forma dall'azossiacido, in seguito a perdita di anidride carbonica, siccome la reazione non avviene di mezzo acido (e perciò in questo caso è da escludersi la formazione intermedia di un sale di fenildiazonio) ma bensì in soluzione alcalina, è naturale che una volta stabilita la costituzione dell'azossiderivato di partenza, si debba pensare alla forma di un imminonitrobenzolo:

$$\begin{array}{l} C_6H_5.N=N.COOH \\ \| \\ O \end{array} = \begin{array}{l} C_6H_5.N=NH \\ \| \\ O \end{array} + CO_2$$

perfettamente corrispondente a quella che io ho assegnata alla cosidetta nitrosofenilidrossilammina, da me ottenuta anche per azione dell'idrossilammina sul nitrobenzolo:

$$\begin{array}{l} C_6H_5.N=N.OH \\ \| \\ O \end{array}$$

Ed è pure noto che un sale dell'idrato di diazobenzolo è stato preparato da Bamberger facendo reagire la sodioammide sul nitrobenzolo.

Ad una tale formola per un idrato di diazobenzolo ha accennato per la prima volta Kekule ed in seguito anche Eug. Bamberger, ed essa è resa probabile anche dallo studio dei prodotti di ossidazione dell'azossifenolo:

$$\begin{array}{l} C_6H_5\,N=N.C_6H_4(OH) \\ \| \\ O \end{array}$$

ed ai quali accennerò in una prossima pubblicazione.

Fin da ora dirò che i sali dell'acido:

$$C_6H_5\,N = N\,.\,COOH$$
$$\|$$
$$O$$

sono molto più stabili di quelli del corrispondente azoacido:

$$C_6H_5\,.\,N = N\,.\,COOH$$

e che l'azossiacido stesso, sebbene molto alterabile, può esistere per qualche tempo anche allo stato libero.

Si vede che l'introduzione di un atomo di ossigeno aumenta la stabilità di questi prodotti, e ciò si verifica anche nella serie:

$$C_6H_5\,.\,N_2H$$
$$C_6H_5\,.\,N_2OH$$
$$C_6H_5\,.\,N_2O_2H$$

la stabilità dei cui termini cresce con l'aumentare del numero degli atomi di ossigeno. Il primo si scinde immediatamente in benzolo ed azoto. come ha trovato Widman; gli idrati dei diazocomposti, come ha trovato Hantzsch, possono esistere allo stato libero, almeno per qualche tempo, in soluzione acquosa; i due composti corrispondenti al terzo termine, l'acido diazobenzolico e la nitrosofenilidrossilammina. sono invece entrambi stabili e ben definiti.

Le reazioni descritte in queste Note permettono anche di chiarire alcune altre trasformazioni osservate da Eugenio Bamberger [1] e che egli non è riuscito a spiegare in modo soddisfacente.

Egli ha trovato infatti che l'ossidazione del cianuro di p-clorodiazobenzolo con acqua ossigenata procede *in modo inaspettato* perchè invece della clorofenilnitrammina si forma p-cloronitrosofenilidrossilammina, sebbene in non grande quantità, perchè la maggior parte si trasforma nell'ammide:

$$C_6H_4Cl\,.\,N{:}N\,.\,CO\,.\,NH_2\,.$$

Questa ossidazione corrisponde, secondo Bamberger, all'eguaglianza:

$$C_6H_4Cl\,.\,N{:}N\,.\,CN + H_2O_2 = C_6H_4Cl\,.\,N\begin{matrix}NO\\OH\end{matrix} + HCN\,.$$

Bamberger aggiunge inoltre che tale processo ricorda l'ossidazione che subisce anche la nitrosoacetanilide per azione dell'acqua ossigenata e che

[1] Berliner Berichte, *45* (1912), 2054.

conduce del pari alla corrispondente nitrosoidrossilammina:

$$C_6H_5 . N(NO) . CO . CH_3 + H_2O_2 = C_6H_5 . N\begin{matrix}NO\\OH\end{matrix} + CH_3 . COOH .$$

Si comprende subito che anche in questo caso Bamberger non ha veduto chiaro, e che invece le reazioni si spiegano nel miglior modo ammettendo che dal cianuro si formi in una prima fase l'azossicomposto:

$$C_6H_4Cl . N{:}N . CN + H_2O_2 = C_6H_4Cl . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . CN + H_2O$$

il quale viene successivamente idrolizzato con formazione di nitrosofenilidrossilammina alla quale, anche per questa ragione, si deve assegnare la formola di struttura da me stabilita:

$$C_6H_4Cl . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . CN + H_2O = C_6H_4Cl . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . OH + HCN .$$

Il Bamberger, senza tenere conto dei fatti sperimentali, preferisce a secondo che gli garba, l'una o l'altra forma per la nitrosofenilidrossilammina; così p. es. a pag. 2055 dello stesso lavoro si giova della mia formola quando riporta, tentando di farle passare come sue, alcune eguaglianze che io aveva stabilite alcuni anni prima di lui (1), sebbene egli sapesse perfettamente che sono mie, perchè più volte egli mi ha scritto in proposito.

Che poi non si debba ammettere che in una prima fase possa formarsi l'idrato del diazocomposto, lo si comprende dal fatto che in questo caso dovrebbe formarsi il corrispondente acido diazobenzolico.

(1) Questi Rendiconti, vol. XIV (1905), 2° sem., pag. 658.

Biologia. — *Esistono diverse razze di fillossera della vite?* Nota di B. Grassi e M. Topi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Balistica. — *Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto.* Nota del Corrispondente Guido Fubini.

In una precedente Nota testè pubblicata in questi Rendiconti, mi sono occupato del problema della correzione del tiro, per il quale ho determinato un'equazione differenziale che lega direttamente ai dati iniziali di tiro la gittata e l'angolo di arrivo su un piano orizzontale o verticale qualsiasi. Qui mi occuperò, invece, del problema di calcolare la traiettoria di un dato proietto. Nel § 1 dò alcune generalizzazioni del metodo Siacci, che credo utili per lo studio del tiro con forte dislivello tra origine e bersaglio; negli altri paragrafi mi occupo invece del cosiddetto calcolo di una traiettoria per punti, cioè del calcolo di una traiettoria eseguito mediante decomposizione in archi parziali. Il § 2 vuole perfezionare il calcolo numerico della densità media dell'aria relativa a un arco di traiettoria; il § 3 contiene una osservazione affatto elementare, che mi si presentò studiando le traiettorie del nostro mortaio da 210: che cioè in molti casi, specialmente per velocità moderate, il semplice sviluppo di Taylor dà un'approssimazione non inferiore a quella ottenuta con altri metodi più faticosi e meno rapidi.

§ 1. *Generalizzazione del metodo Siacci.* — Per una tale generalizzazione credo si debba evitare l'uso di funzioni in due variabili (di tavole a doppia entrata), che porterebbero probabilmente a tavole a tripla entrata per i fattori di tiro. Perchè, se così si volesse procedere, meglio varrebbe abbandonare il metodo Siacci, spezzare la traiettoria in archi, in ciascuno dei quali il problema si possa ridurre a quadrature, costruendo tavole numeriche (proprio a doppia entrata) per questi integrali, e raggiungendo così la massima esattezza teorica. Io credo preferibile rendere, per così dire, più elastico il metodo Siacci, ricordando che una formola teorica tanto più completamente può rappresentare un fenomeno fisico, quanto maggiore è il numero delle costanti arbitrarie, che essa contiene.

Nelle formole Siacci compare un *solo* parametro β: ciò che basta per il tiro contro un bersaglio posto sull'orizzonte dell'arma, perchè in tale studio vi è un'incognita sola: la *gittata*. E in fondo il β si determina appunto in modo da mettere d'accordo risultati teorici e sperimentali. Il β non basta più, secondo me, per bersagli a forti dislivelli dall'arma, che dipendono da *due* coordinate, o per altri problemi più complicati. Nella mia Nota citata ho provato che il metodo Siacci si può, con opportuno cambiamento di funzione incognita, considerare come la sostituzione del solo primo termine allo sviluppo in serie, che si ottiene dal classico metodo delle successive approssimazioni. Risultati migliori sono pertanto da attendersi dal

calcolo del secondo termine di tale sviluppo; ma le difficoltà di apprezzare la migliore approssimazione raggiunta, mi hanno indotto a procedere per altra via, che pure permette di realizzare una ulteriore approssimazione. A tal fine sarà bene esporre il metodo Siacci nella forma seguente. Per trovare alcune delle curve che soddisfano a un'equazione $dy = f(x, y)\,dx$, si scriva tale equazione nella forma

$$\frac{dy}{\mathrm{Y}(y)} = \frac{\mathrm{X}(x)}{\mathrm{Y}(y)} f(x, y) \frac{dx}{\mathrm{X}(x)}, \quad \text{ossia} \quad \int \frac{dy}{\mathrm{Y}(y)} = \beta \int \frac{dx}{\mathrm{X}(x)},$$

dove $\mathrm{X}(x)$ ed $\mathrm{Y}(y)$ sono funzioni arbitrarie della sola x, o della sola y, e β è un conveniente valore intermedio di $\dfrac{\mathrm{X}(x)}{\mathrm{Y}(y)} f(x, y)$ lungo le curve cercate; il quale β si determinerà per via teorica, o sperimentale. Il risultato sarà *tanto migliore*, quanto *più ristretti* sono i limiti tra cui varia β. Così concepito, il metodo Siacci si presta alle più svariate generalizzazioni, ottenute, o cambiando le variabili x, y, oppure le funzioni X, Y.

Conserveremo le notazioni abituali [1], ponendo poi $w = v \cos\theta =$ velocità orizzontale; e introdurremo una nuova variabile ω (il cui valore iniziale sarà indicato con Ω), scrivendo $w = \psi(\omega)$. Per ogni scelta della funzione arbitraria $\psi(\omega)$ otterremo particolari formole di tiro: noi adotteremo $\psi(\omega) = a + b\omega$ con a, b costanti (da scegliersi in modo opportuno, come vedremo). Ma potremmo per es. assumere ψ uguale anche ad un polinomio di grado più elevato. L'equazione $Cg\,dw = i\delta_y v \mathrm{F}(v)\,d\theta$ dell'odografa dà, integrata

$$\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{Cb}{2\delta_0 i\beta}\left[\mathrm{I}(\omega) - \mathrm{I}(\Omega)\right]$$

dove β è un valore intermedio di

$$\beta' = \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{v\,\mathrm{F}(v)}{\omega\,\mathrm{F}(\omega)} \cos^2\theta .$$

E, continuando col metodo Siacci, si trova poi [2]:

$$x = \frac{\mathrm{C}}{\delta_0 i\beta}\left\{\Delta(\Omega) - \Delta(\Omega)\right\} \text{ ove } \quad \Delta(\omega) = \frac{a^2 b}{2g}\mathrm{I}(\omega) + 2a\,b^2\,\mathrm{T}(\omega) + b^3\,\mathrm{D}(\omega) .$$

[1] Con A, D, I, T indico le funzioni Siacci, con $\mathrm{F}(v)$ la funzione resistente Siacci, con C il coefficiente balistico, con i il coefficiente di forma, con θ l'inclinazione, con φ l'angolo di proiezione. Gli assi x, y hanno la posizione consueta. Altre formole, *meno analoghe* a quelle del Siacci, noi potremmo ottenere *sostituendo alla w un'altra variabile indipendente*, funzione di v e di θ.

[2] Se si ponesse $\psi(\omega) = a + b\omega + c\omega^2 + e\omega^3$ con a, b, c, e costanti, si troverebbe

$$\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\mathrm{C}}{2\delta_0 i\beta}\left\{b\left[\mathrm{I}(\omega) - \mathrm{I}(\Omega)\right] + 4gc\left[\mathrm{T}(\omega) - \mathrm{T}(\Omega)\right] + 6ge\left[\mathrm{D}(\omega) - \mathrm{D}(\Omega)\right]\right\}.$$

E, supposto soltanto $\psi(\omega) = a + b\omega + c\omega^2$, si troverebbe per la x una formola affatto

Posto $B = \int I d T$, se ne deduce ancora:

$$\frac{y}{x} - \operatorname{tg}\varphi = -\frac{Cb}{2\delta_0 \beta'}\left(\frac{\mathfrak{A}(\omega) - \mathfrak{A}(\Omega)}{\Delta(\omega) - \Delta(\Omega)} - I(\Omega)\right),$$

ove

$$\mathfrak{A}(\omega) = \frac{a^2 b}{2g}\,\tfrac{1}{2} I^2(\omega) + 2a\,b^2\,B(\omega) + b^3\,A(\omega).$$

Tranne la $B(\omega)$, funzione di andamento semplicissimo, tutte le altre funzioni coincidono con quelle calcolate dal Siacci; e le precedenti formole si prestano benissimo ai calcoli numerici. Per questi basterà determinare a e β' in modo che per due punti scelti a piacere della traiettoria (calcolata in modo approssimato con un metodo qualsiasi, per es. anche col metodo originale del Siacci) la β' diventi uguale ad 1, oppure in modo che per tre punti (per es. punto di partenza, di arrivo e vertice) la β' assuma uno stesso valore, oppure in altri modi, che permettano di apprezzarne facilmente un valor medio. E anzi tale procedimento, ripetuto due volte, condurrà a risultati ancora più approssimati: *Si è così trasformato nel modo più semplice, anche per il calcolo numerico, il metodo Siacci in un metodo di successive approssimazioni.* Naturalmente il metodo si può anche applicare ad un solo pezzo di traiettoria, e dà nuovi e approssimati metodi di calcolo di una traiettoria per punti.

Ma io credo utile considerare le precedenti formole anche da un altro punto di vista. Assumiamo pure l'ipotesi consueta (che mi sembra però parecchio arbitraria) di considerare β come costante lungo una stessa verticale, e perciò funzione soltanto dell'angolo di proiezione φ e dell'ascissa del bersaglio. Noi abbiamo a nostra disposizione due parametri a, b per compensare l'errore, dando ad a, b valori opportuni: per es. ponendo $b = \cos\varepsilon$, ove ε è l'angolo di sito definito dalla $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{y}{x}$. Il parametro a varierà allora verisimilmente con grande lentezza lungo una ordinata: e si tratterà soltanto di fare uno studio sperimentale o teorico (con sviluppo in serie) del come varia a al variare dell'ordinata, così come il Siacci ha fatto per il parametro β.

Oppure anche si può porre $a = 0$: le formole diventano assai simili a quelle del Siacci. E ci si può accontentare poi di studiare come varia

---

analoga alla precedente, ove però $\Delta(\omega)$ sarebbe definito dalla

$$\Delta(\omega) = \frac{a^2 b}{2g} I(\omega) - 2a\,b^2 + ac\; I(\omega) + (b^3 + 6abc)\, D(\omega) + 4c(b^2 + ac)\, D_2(\omega) + \\ + 5bc^2\, D_3(\omega) + 2c^3\, D_4(\omega),$$

ove è scritto $D_n(\omega) = \int -\frac{u^n\,du}{F(u)}$.

$b \sec \varepsilon$ lungo una verticale; ciò che pure porterà verisimilmente a funzioni di lenta variabilità (1). Si otterrebbero così formole, che anche per tiri con forti dislivelli dànno l'approssimazione del solito metodo per tiri all'orizzonte con l'aggiunta di una sola tavola che ci dica come varia il parametro $b \sec \varepsilon$. Conto di ritornare su questo studio numerico.

§ 2. *Densità media dell'aria per un arco di traiettoria.* — Negli studî per calcolare una traiettoria per punti, si presenta sempre il problema di determinare il valor medio della densità dell'aria per l'arco di traiettoria considerato; e si espongono sovente dei metodi, in apparenza di gran precisione (tanto da distinguere il β principale dai secondarî), che, a mio credere, dànno un'approssimazione molto inferiore alla sperata (come mi sono accorto facendo effettive applicazioni numeriche). La ragione sta in ciò: che nello studio del valor medio di δ_y ha importanza non trascurabile l'integrale, per il calcolo del quale si cerca tale valor medio. Trascurare tale integrale, e sostituirlo con un altro (generalmente lo $\int \delta_y \, dx$) rende illusoria ogni approssimazione maggiore di quella ottenuta prendendo un valor medio suggerito senz'altro dall'intuizione, senza calcoli speciali. Ora l'integrale, che più frequentemente si presenta in balistica sia a chi applichi i metodi Siacci, sia a chi consideri con Eulero archi ove $F(x)$ è proporzionale a x^n, è l'integrale $L = \int_{\varphi}^{\theta} \frac{1}{\delta_0} \delta_y \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$; e, a seconda dei casi, lo si vuole scrivere nella forma $\delta_m \frac{1}{\delta_0} \int_{\varphi}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$, oppure $\frac{\gamma}{\delta_0} \delta_m \int_{\varphi}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$; ove δ_m è un valor medio di δ_y, e γ un valor medio di $\frac{1}{\cos^{n-2} \theta}$. Per determinare δ_m, oppure il prodotto $\gamma \delta_m$, basterà evidentemente calcolare il valore di L. Sarà nei due casi $\delta_m = \frac{L \, \delta_0}{\xi_{n-1}(\theta) - \xi_{n-1}(\varphi)}$, oppure $\gamma \delta_m = \frac{L \, \delta_0}{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi}$. (Con ξ_m indico al solito lo $\int \frac{d\theta}{\cos^{m-1} \theta}$). Ora si noti che, indicando con h una costante, la quale, nelle condizioni usuali, vale 0,00008, si ha $\frac{\delta_y}{\delta_0} = 1 - hy$. Si tratta pertanto di calcolare

$$L = \int_{\varphi}^{\theta} (1 - hy) \frac{d\theta}{\cos^n \theta}.$$

(1) Il caso di $a = 0$, $b = 1$ è già stato usato dall'Olsson; il caso $a = 0$, $b = \sqrt{\cos\varphi \cos\varepsilon}$ dall'ing. colonnello Bianchi in un suo pregevole lavoro (Rivista di artiglieria e genio, vol. I, 1914). L'ing. Bianchi lo applica al calcolo di un arco di traiettoria. Non conoscevo queste ricerche, quando sono giunto alle formole precedenti. La maggiore generalità di queste e il modo affatto nuovo di concepirle che sopra ho esposto per le applicazioni numeriche, mi hanno indotto ciononostante a pubblicare questa nota.

Ora l'idea più semplice e *più esatta* è quella di sostituire *in questo integrale* alla y un suo valore approssimato (anche soltanto in modo grossolano, perchè h è molto piccolo). E i calcoli numerici risultano tanto semplici quanto i consueti, che ricorrono invece al calcolo di $\int y dx$. Come ora proveremo, si possono in modi molteplici trovare tre costanti a, b, c, così da poter scrivere con sufficiente approssimazione $y = a + b \operatorname{tg}\theta + c \operatorname{tg}^2\theta$. Si avrà allora:

$$L = (1 + hc - ha)\left[\xi_{n-1}(\theta) - \xi_{n-1}(\varphi)\right] - ch\left[\xi_{n+1}(\theta) - \xi_{n+1}(\varphi)\right] - \\ - \frac{hb}{n}\left[\sec^n\theta - \sec^n\varphi\right],$$

che risolve il nostro problema per mezzo delle solite funzioni $\xi(\theta)$, per cui i balistici hanno, come è noto, costruito tavole numeriche. Tutto è ridotto pertanto a calcolare le costanti a, b, c. Ciò che si può fare nei modi più svariati: o calcolare in modo analogo a quello che esponiamo nel § 3 lo sviluppo della y secondo le potenze di tang θ, oppure sostituire alla traiettoria una curva media tra due parabole P_1, P_2 che comprendano la traiettoria stessa. A parabole P_i possiamo per es. assumere quelle [1] che nel vuoto sarebbero descritte da un proietto, che *partisse*, o che *arrivasse* con la stessa inclinazione e con la stessa velocità del nostro proietto.

§ 3. *Sviluppo di Taylor.* — Nello studiare le traiettorie per il nostro mortaio da 210, ho notato che il semplice sviluppo di Taylor delle x, y secondo le potenze di tang θ, o di θ permette, senza speciali tavole numeriche, di calcolare un arco di traiettoria con metodi rapidi e non meno approssimati dei consueti. Io qui, *a titolo di esempio*, mi occuperò dello sviluppo della x secondo le potenze di θ. Supponiamo di studiare un arco di traiettoria, ove $F(v)$ sia proporzionale a v^n; cosicchè $F'(v) = \frac{nF(v)}{v}$. Da questa, e dalle equazioni fondamentali della balistica si deduce derivando e ponendo $H = \frac{i\,\delta_y}{Cg}$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{v^2}{g} \quad ; \quad \frac{d^2x}{d\theta^2} = -2\frac{v^2}{g}\left[\operatorname{tang}\theta + HF(v)\sec\theta\right]$$

$$\frac{d^3x}{d\theta^3} = -2\frac{v^2}{g}\left\{(1 + 3\operatorname{tg}^2\theta) + (n+5)\operatorname{tg}\theta\left[HF(v)\sec\theta\right] + \right. \\ \left. + (n+2)\left[HF(v)\sec\theta\right]^2\right\}.$$

Trascurando i termini dello sviluppo, che contengono derivate di ordine superiore, la formola di Lagrange del resto dimostra che l'errore commesso per un arco, ove θ varia di α gradi, è minore di $\frac{T}{24}\alpha^4\left(\frac{\pi}{180}\right)^4$

[1] Altre parabole di questo tipo sono date dal prof. Picone in una sua notevole Memoria in corso di stampa nella Rivisia di artiglieria e genio; altre traiettorie approssimate del tipo voluto sono date nella Nota citata dell'ing. Bianchi.

ove T è il massimo di $\left|\frac{d^4x}{d\theta^4}\right|$ nell'arco considerato, cioè è il massimo di

$$2\frac{v^2}{g}\{4\operatorname{tag}\theta(2+3\operatorname{tg}^2\theta)+[\mathrm{HF}\sec\theta][(n+7)+(n^2+9n+26)\operatorname{tg}^2\theta]+$$
$$+3[\mathrm{HF}\sec\theta]^2(n+2)(n+3)\operatorname{tg}\theta+2(n+1)(n+2)[\mathrm{HF}\sec\theta]^3\}.$$

Il calcolo numerico dimostra che questo metodo, applicato al mortaio succitato, rivaleggia in precisione con i soliti tanto più complicati.

Geodesia. — *Azimut assoluto dell' Osservatorio Vesuviano sull'orizzonte dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte in Napoli.* Nota di G. Cicconetti, presentata dal Socio P. Pizzetti.

Negli anni 1911 e 1912 sono state fatte sul R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte in Napoli due determinazioni di azimut assoluto relative al R. Osservatorio Vesuviano.

Nel 1911 le osservazioni vennero effettuate con l'Universale Bamberg del Gabinetto di Geodesia della R. Università (circoli di 27 cm. di diametro, cannocchiale centrale spezzato, valore angolare della parte di livella azimutale 3″,67) e nel 1912 con un Teodolite Starke di 1ª grandezza (circolo di 26 cm. di diametro, cannocchiale centrale retto, valore angolare della parte di livella azimutale 4″,75) appartenente al Gabinetto di Topografia del R. Istituto tecnico di Napoli.

Lo scopo di queste determinazioni era duplice: in primo luogo la ricerca dell'azimut dell'Osservatorio Vesuviano ed in secondo luogo vedere qual grado di precisione fosse conseguibile nella misura di un azimut astronomico con un teodolite geodetico facilmente montabile e smontabile e non specialmente adatto per osservazioni stellari come quello adoperato nella seconda misura.

La stazione a Capodimonte fu stabilita sul pilastrino scoperto della terrazza che sormonta la parte centrale dell'edificio, vicino alla cupola centrale dell'equatoriale; la mira notturna, costituita di una lampada a petrolio al fuoco di una lente, venne centrata sul pilastrino della penultima terrazza dell'Osservatorio Vesuviano, presso l'angolo nord-est, sul quale si era già compiuta nel 1910 una determinazione astronomica di latitudine (1).

Le osservazioni di azimut coll'Universale Bamberg ebbe luogo nei giorni 30 giugno, 1, 2, 3 luglio 1911 e durante questo periodo lo strumento rimase fisso sul pilastrino, protetto di giorno da una copertura mobile che veniva tolta alla sera.

I puntamenti della Polare venivano riferiti ad occhio ed orecchio ad un cronometro trasportabile Hausmann del Gabinetto di Geodesia, e profit-

(1) La latitudine astronomica del R. Osservatorio Vesuviano determinata nel 1910. R. Commissione geodetica italiana. 1915.

tando dei pendoli dell'Osservatorio si eliminarono le determinazioni dirette di tempo sostituendole con confronti cronografici dell' Hausmann. al principio ed alla fine di ogni periodo di osservazioni, col pendolo Riefler sul quale si facevano le ordinarie determinazioni di tempo per l'Osservatorio.

I dati riguardanti il pendolo Riefler, gentilmente comunicatimi dal dott. V. Nobile, furono quelli segnati nel seguente specchio:

Data	Tempo siderale locale	Correzione del Riefler	Andamento (accelera) diurno	Andamento (accelera) orario
	h m	m s	s	s
1911 - Giugno 29	16,36	— 0.20,56	— 0,39	— 0,0163
» » 30	—	20,96	0,29	0,0121
» Luglio 1	—	21,25	0,44	0,0182
» » 2	—	21,69	0,26	0,0108
» » 3	—	21.95	0,35	0,0146
» » 4	—	22,30		

Confronti cronografici Hausmann-Riefler e andamenti dell' Hausmann.

Data 1911	Hausmann	Riefler	Tempo siderale	Correzione dell' Hausmann	Andam. orario dell' Hausmann (ritarda)
	h m	h m s	h m s	h m s	s
Giugno 30 (sera)	12.50	13.57.20,67	13 56.59,75	+ 1.06.59,75	0,000
Luglio 1 (matt.)	21.54	23.01 20,76	23.00.59,72	06.59,72	
» » (sera)	11 54	13.01.22,03	13.01.00,38	07.00,38	
» 2 (sera)	11.40	12 47.23,97	12.47.02,35	07.02,35	+ 0,083
» 3 (matt.)	19.55	21.02.24,94	21.02.03.21	07.03,21	+ 0,104
» 3 (sera)	12.06	13 13.27,56	13.13 05,64	07.05,64	
» 4 (matt.)	18.34	19.41.28,08	19.41.06,08	07.06,08	+ 0,067

Qui appresso si riportano i risultati delle determinazioni di azimut col Bamberg, calcolato in base alla latitudine $\varphi = 40°.51'.45'',1$ del pilastrino d'osservazione. Ciascuna serie veniva effettuata col solito schema: Cerchio a sinistra - Mira, Polare — Cerchio a destra - Polare, Mira, Mira, Polare — Cerchio a sinistra - Polare, Mira — e ad ogni serie si girava il cerchio orizzontale di 10°. A metà osservazioni si invertì il cannocchiale sui perni.

Le notazioni C_m C_p rappresentano la costante di collimazione rispettivamente dedotta dalle osservazioni sulla Mira e da quelle sulla Polare.

DATA 1911	Serie	Azimut della Mira	C_M	C_P	$C_M - C_P$	Espressioni differenziali		
Giugno 30	I	108°14′23″,28	— 3″,5	— 2″,6	— 0″,9	$-0,29\,d\alpha^s$	$-0,91\,d\delta''$	$+0,02\,d\varphi$
»	II	25,80	— 5,1	— 3,8	— 1,3	— 0,23	— 1,08	+ 0,02
»	III	22.52	— 3,2	— 2,2	— 1,0	— 0,17	— 1,18	+ 0,02
»	IV	22,68	— 5,0	— 4,3	— 0,7	— 0,11	— 1,26	+ 0,02
»	V	21,50	— 6,9	— 2,3	— 4,6	— 0,05	— 1,31	+ 0,02
»	VI	24,62	— 3,8	— 3,9	+ 0.1	0,00	— 1,31	+ 0,02
»	VII	20,85	— 5.7	— 2,4	— 3,3	+ 0,05	— 1.31	+ 0.02
»	VIII	22,92	— 6,3	— 2,1	— 4,2	+ 0,11	— 1,28	+ 0,02
»	IX	21,90	— 5,6	— 3,6	— 2,0	+ 0,16	— 1,21	+ 0,02
»	X	22,67	— 5,1	— 3,0	— 2,1	+ 0,21	— 1,14	+ 0,02
»	XI	20,10	— 5,6	— 3,6	— 2,0	+ 0,25	— 1,04	+ 0,02
»	XII	24,80	— 5,5	— 2,8	— 2,7	+ 0,29	— 0,95	+ 0,02
Luglio 1	XIII	24,10	— 2,7	— 2,0	— 0,7	— 0,36	— 0.54	+ 0,01
» 2	XIV	24,70	— 3,2	— 2,5	— 0,7	— 0,36	— 0,50	+ 0,01
» »	XV	24.82	— 4,9	— 2.9	— 2,0	— 0,34	— 0,70	+ 0,01
» »	XVI	23,18	— 5,4	— 3,2	— 2,2	— 0,31	— 0,83	+ 0,01
» »	XVII	22.62	— 4,8	— 2,6	— 2,2	— 0,27	— 0,96	+ 0,02
» »	XVIII	21,70	— 5,3	— 2,7	— 2,6	— 0,25	— 1,07	+ 0,02
		Inversione dei perni.						
» »	XIX	24,27	— 4,3	— 3,2	— 1,1	— 0,20	— 1.16	+ 0,02
» »	XX	25,48	3.5	— 2,1	— 1.4	— 0,14	— 1,24	+ 0,02
» »	XXI	21,00	— 2,5	— 2,8	+ 0,3	— 0,09	— 1,28	+ 0,02
» »	XXII	21,70	— 4,2	— 2,5	— 1,7	— 0,04	— 1,31	+ 0,02
» »	XXIII	23,15	— 2,7	— 2,8	+ 0,1	0,00	— 1.32	+ 0,02
» »	XXIV	23,35	— 4,0	— 1,6	— 2,4	+ 0,06	— 1,31	+ 0,02
» 3	XXV	20,32	— 3,2	— 2,4	— 0,8	— 0,36	— 0,60	+ 0,01
» »	XXVI	23,50	— 2,5	— 1,2	— 1,3	— 0,33	— 0,72	+ 0,01
» »	XXVII	24,40	— 2,6	— 1,5	— 1,1	— 0,31	— 0,82	+ 0,01
» »	XXVIII	21,50	— 3,1	— 1,9	— 1,2	— 0,29	— 0,90	+ 0,02
» »	XXIX	23,20	— 2,8	— 2,0	— 0,8	— 0,26	— 0,98	+ 0,02
» »	XXX	22,78	— 3,4	— 1,9	— 1,5	— 0,24	— 1,05	+ 0,02
» »	XXXI	23,42	— 3,0	— 1,8	— 1,2	— 0,21	— 1,12	+ 0,02
» »	XXXII	23,32	— 2,7	— 3,9	+ 1,2	— 0,17	— 1,18	+ 0,02
» »	XXXIII	24,38	— 3,6	— 1,1	— 2,5	— 0,14	— 1,23	+ 0,02
» »	XXXIV	25,25	— 3,6	— 2,2	— 1,4	— 0,11	— 1,26	+ 0,02
» »	XXXV	24.48	— 2.6	— 1.7	— 0,9	— 0,08	— 1,29	+ 0,02
» »	XXXVI	22,40	— 2,7	— 1.3	— 1,4	— 00,4	— 1,31	+ 0,02

MEDIA $A = 108.14\,23,11 \pm 0,24$ $dA = -0,19\,d\alpha - 1,07\,d\delta + 0,02\,d\varphi$

Epoca 1911,50

Le determinazioni di azimut col teodolite Starke ebbero luogo nelle notti del 17 e 18 giugno 1912 nelle stesse condizioni e collo stesso metodo dell'anno precedente, salvo che furono effettuate 25 serie invece di 32 girando il cerchio di 15° fra una serie e l'altra. Lo strumento si montava la sera sul pilastrino, smontandolo la mattina alla fine delle osservazioni per riporlo nelle proprie cassette. I puntamenti della Polare si fecero sempre senza l'aiuto di oculare prismatico e l'illuminazione del campo si otteneva con una lamina a foggia di corona ellittica, applicata a 45° sull'obbiettivo, in modo da riflettere verso l'interno del cannocchiale i raggi di una lampadina posta di lato.

I dati relativi al pendolo Riefler furono i seguenti:

Data	Tempo siderale	Correzione del Riefler	Andamento (ritarda)	
			diurno	orario
	h m	m s	s	s
1912 - Giugno 15	14.15	+ 0.35,18	+ 0,082	+ 0,0003
» » 25	14.12	+ 0.36,00		

Confronti cronografici Hausmann-Riefler e andamenti dell'Hausmann.

Data 1912	Hausmann	Riefler	Tempo siderale	Correzione dell' Hausmann	Andamento orario dell' Hausmann (ritarda)
	h m	h m s	h m s	h m s	s
Giugno 17 (sera)	6.43	11.30.50,78	11.31.26,11	+ 4.48.26,11	+ 0,186
» 18 (matt.)	16.12	20.59.52,50	21.00.27,87	27,87	
» » (sera)	6.41	11.28.54,04	11.29.29,46	29,46	
» » »	11.10	15.57.54,28	15.58.29,71	29,71	+ 0,056

Ecco i risultati delle determinazioni di azimut:

Data 1912	Serie	Azimut della Mira	C_M	C_P	$C_M - C_P$			
Giugno 17	I	108.14.22,78	— 2,5	— 3,8	+ 1,3	— 0,40 $d\alpha$	— 0,33 $d\delta$	+ 0,01 $d\varphi$
» »	II	23,35	— 3,4	— 2,2	— 1,2	— 0,38	— 0,44	+ 00,1
» »	III	21,32	— 4,2	— 3,0	— 1,2	— 0,36	— 0,58	+ 00,1
» »	IV	22,02	— 3,0	— 3,1	+ 0,1	— 0,34	— 0,68	+ 0,01
» »	V	23,82	— 4,3	— 3,3	— 1,0	— 0,32	— 0,78	+ 0,01
» »	VI	24,67	— 3,0	— 2,6	— 0,4	— 0,29	— 0,86	+ 0,02
» »	VII	22,30	— 2,7	— 3,6	+ 0,9	— 0,27	— 0,93	+ 00.2
» »	VIII	21,18	— 4,2	— 3,2	— 1,0	— 0,26	— 1,00	+ 0,02
» »	IX	24,12	— 3,1	— 3,9	+ 0,8	— 0,23	— 1,08	+ 0,02
» »	X	22,88	— 1,2	— 1,5	+ 0,3	— 0,20	— 1,13	+ 0,02
» »	XI	26,25	— 3,2	— 1,9	— 1,3	— 0,17	— 1,18	+ 0,02
» »	XII	24,05	— 2,6	— 4,0	+ 1,4	— 0,14	— 1,22	+ 0,02
» »	XIII	21,55	— 2,0	— 2,9	+ 0,9	— 0,12	— 1,24	+ 0,02
» »	XIV	26,85	— 0,7	— 4,1	+ 3,4	— 0,09	— 1,26	+ 0,02
» »	XV	26,15	— 1,4	— 4,4	+ 3,0	— 0,05	— 1,31	+ 0,02
» »	XVI	22,00	— 2,4	— 2,4	0,0	— 0,02	— 1,31	+ 0,02
» »	XVII	20,82	— 1,3	— 2,3	+ 1,0	+ 0,01	— 1,32	+ 0,02
» »	XVIII	23,75	— 3,7	— 4,4	+ 0,7	+ 0,06	— 1,30	+ 0,02
» »	XIX	22,32	— 1,4	— 1,9	+ 0,5	+ 0,10	— 1,26	+ 0,02
» 18	XX	27,35	— 0,2	— 2,5	+ 2,3	— 0,39	— 0,31	+ 0,01
» »	XXI	22,95	— 2,1	— 1,8	— 0,3	— 0,39	— 0,41	+ 0,01
» »	XXII	21,82	— 1,6	— 1,3	— 0,3	— 0,38	— 0,51	+ 0,01
» »	XXIII	24,18	+ 0,2	— 1,1	+ 1,3	— 0,36	— 0,60	+ 0,01
» »	XXIV	21,01	— 2,2	— 0,9	— 1,3	— 0,34	— 0,69	+ 0,01

Media A = 108.14.23,31 ± 0,38 $dA = -0,22\,d\alpha - 0,91\,d\delta + 0,02\,d\varphi$

Epoca 1912,46

Per ridurre al polo medio i risultati ottenuti per l'azimut nelle due diverse epoche, si cavano dalle Astron. Nachr. Nr. 4588, Bd. 192 e Nr. 4665, Bd. 195, gli elementi di Albrecht:

1911,50	$x = -0.081$	$y = +0,321$
1912,46	$x = -0.124$	$y = +0,036$

coi quali, essendo $\lambda = -14^\circ\,15'$ la longitudine della stazione di Capodimonte rispetto a Greenwich, si calcolano le correzioni

$$-(y\cos\lambda - x\,\mathrm{sen}\,\lambda)\sec\varphi\,.$$

Queste risultano:

per le determinazioni del 1911 . . . . — 0″,15

e per quelle del 1912 . . . . . — 0″,01 .

Gli azimut corretti per lo spostamento del polo divengono pertanto

(1911) $108° 14' 22''.96 \pm 0'',24$ (1912) $108° 14' 23'',30 \pm 0'',38$

e la loro media ponderata conduce al valor finale dell'azimut astronomico del R. Osservatorio Vesuviano nell'orizzonte del R. Osservatorio di Capodimonte:

$$108° 14' 23'',06 \pm 0'',15 .$$

I risultati precedenti mostrano che, in latitudini non troppo elevate, con un teodolite geodetico da triangolazione tipo Starke possono ottenersi buone determinazioni di azimut. L'uso di uno strumento di questo genere può quindi riuscire utile a tale scopo specie nelle stazioni di montagna in vista della maggior facilità di trasporto di questi teodoliti rispetto ai veri universali astronomici e soprattutto della possibilità di montarli sera per sera sul pilastrino, senza essere obbligati ad un assetto stabile della stazione per tutto il periodo delle osservazioni. Nè le determinazioni di tempo possono costituire una difficoltà, perchè con un teodolite a cannocchiale retto centrale, quale è quello adoperato, può seguirsi il metodo dei passaggi di stelle orarie pel verticale della Polare o quello della misura di zenitali di stelle in prossimità del 1° verticale. L'inconveniente si manifesta piuttosto quando si tratti di determinare la latitudine perchè il cannocchiale centrale retto del teodolite usato non permette l'applicazione del metodo dei passaggi meridiani di stelle culminanti a nord e a sud a poca distanza dallo zenit, metodo che, non richiedendo l'uso del cronometro, è indubbiamente il più comodo da seguirsi in campagna per la determinazione della latitudine.

Fisica matematica. — *Sulla capacità elettrostatica di un sottile anello conduttore.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Chiedo il permesso di intrattenere l'Accademia sopra un argomento che in questi Rendiconti esposi alcune settimane or sono (1). per apportare ai risultati alcune modificazioni e complementi, atti a precisare e a esaurire la questione.

Si abbia un anello la cui configurazione geometrica si immagini definita da una sezione trasversale piana τ che si muove deformandosi (con continuità e mantenendosi piana) in modo da mantenersi normale alla linea chiusa l descritta da un suo punto generico (ad es. il baricentro); la linea l definisce l'andamento longitudinale dell'anello.

Sarà da ritenersi *sottile* l'anello se le dimensioni di τ sono dovunque piccole di fronte alle dimensioni longitudinali (con che si intende non solo di fronte alla lunghezza di l, ma anche rispetto al raggio di curvatura in ogni suo punto).

Sia l'anello isolato e caricato di elettricità in equilibrio.

Le formole stabilite nella Nota precedente, definiscono la distribuzione della carica sulla superficie del conduttore e la risultante delle forze elettriche relative ad una generica sezione trasversale dell'anello. Esse sussistono in quanto le sezioni trasversali sono, o si possono ritenere, sensibilmente uguali. Vanno modificate nell'ipotesi, più generale, che la legge di variazione delle sezioni trasversali sia qualunque, purchè tale naturalmente da conservare all'anello la caratteristica di essere sottile.

La legge di distribuzione delle masse elettriche si può compendiare allora in una relazione notevolmente semplice che ora preciserò.

Si fissi sopra la *direttrice* l dell'anello, un'origine degli archi e un senso positivo, per cui ad un generico punto O di l corrisponde un arco

$$0 \leqq s \leq l,$$

denotando con l la lunghezza della direttrice designata finora colla stessa lettera. Sia τ la sezione trasversale piana dell'anello che contiene il punto O; τ' l'analoga sezione nel punto O' di l, cui corrisponde il valore $s + ds$ dell'arco: τ e τ' limitano una fetta del conduttore, di spessore ds. Se si in-

(1) *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore.* [Vol. XXIV (1917), pp. 36 39].

dica con $\nu\, ds$ la quantità di elettricità contenuta sulla porzione di superficie σ dell'anello appartenente alla fetta anzidetta, rappresenterà ν la densità di distribuzione delle cariche, corrispondente alla sezione τ del conduttore; essa risulta definita dalla seguente formola

$$2\nu k = U, \tag{I}$$

essendo U il potenziale elettrostatico (costante) del conduttore ed essendo

$$k = \frac{1}{\tau^2} \int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log \frac{l}{PP},$$

in cui P e P_0 sono due generici punti di τ, $d\tau$ e $d\tau_0$ gli elementi di τ ad essi attigui. La quantità k è un puro numero, che dipende soltanto dalla sezione τ, per cui è, in generale, variabile con questa, cioè è funzione di s.

La formola (I) lascia sussistere, anche in generale, ciò che avevo rilevato nella Nota precedente, e cioè che *la densità ν è indipendente dai caratteri geometrici della direttrice l.*

Per la (I) stessa, la quantità di elettricità in equilibrio su tutto l'anello è definita dalla seguente formola

$$e = \int_l \nu\, ds = \frac{U}{2} \int_l \frac{ds}{k}; \tag{II}$$

per cui la capacità del conduttore risulta essere

$$c = \frac{e}{U} = \frac{1}{2} \int_l \frac{ds}{k}; \tag{III}$$

mentre la eliminazione del potenziale U tra la (II) e la (I), conduce ad assegnare a ν l'espressione seguente

$$\nu = \frac{e}{k \int_l \frac{ds}{k}}, \tag{I'}$$

che va sostituita alla (I) della Nota precedente, nella quale vi è $\sqrt{k}$ al posto di k.

Se, in particolare, le sezioni trasversali τ del conduttore sono tutte eguali tra di loro, k è costante e la (I') e la (III) diventano rispettivamente

$$\nu = \frac{e}{l} \quad , \quad c = \frac{l}{2k}.$$

Dall'ultima di queste scende che la capacità elettrostatica del conduttore è proporzionale alla sua lunghezza.

Merita speciale menzione il caso in cui l'anello è a sezione circolare. Detto a il raggio, è allora [1]

$$k = \frac{1}{4} + \log \frac{l}{a},$$

per cui la capacità assume il valore seguente:

$$c = \frac{2l}{1 + 4 \log \frac{l}{a}}.$$

È quasi superfluo richiamare la circostanza che questi risultati hanno carattere approssimato, tanto maggiore quanto più sottile è l'anello.

1. La giustificazione della formola (I) è immediata. Basta ricorrere all'espressione approssimata, assegnata dal Levi-Civita, alla funzione potenziale newtoniana di un tubo sottile nei punti appartenenti al tubo stesso. Essa, riportata al caso nostro, è la seguente [2]:

$$U(P) = \frac{2\nu}{\tau} \int_\tau \log \frac{l}{\overline{PP_0}} d\tau_0 .$$

Il valore medio del potenziale U nei punti della sezione τ è in conseguenza

$$\frac{1}{\tau} \int_\tau U(P)\, d\tau = 2 \frac{\nu}{\tau^2} \int_\tau d\tau \int_{\tau_0} \log \frac{l}{\overline{PP_0}} d\tau_0 = 2\nu k .$$

Dopo ciò, basta manifestamente rilevare che nella interpretazione elettrostatica della precedente formola, il primo membro altro non è se non il valore del potenziale del conduttore. Con ciò la (1) rimane dimostrata.

2. Sieno $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ i due vettori unitarî diretti secondo la tangente e la normale principale nel generico punto O della direttrice l dell'anello. La risultante Φ delle forze elettriche della sezione trasversale τ, contenente il punto O, è definita dalla formola seguente [3]:

$$\Phi = \frac{d(\nu^2 k)}{ds} \mathbf{t} + \frac{\nu^2 k}{r} \mathbf{n},$$

dove $\frac{1}{r}$ è la curvatura della direttrice l nel punto O.

(1) Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno* [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, vol. XXXIII (1912), pag. 362, formola (11)].

(2) Cfr. Levi-Civita, loc. cit., formola (3).

(3) Cfr. Levi-Civita, loc. cit., § 6.

Avuto riguardo alla (I') la precedente diviene

$$\Phi = \frac{e^2}{\left(\int_l \frac{ds}{k}\right)^2} \frac{d\,\frac{1}{k}}{ds}\,\mathbf{t} \cdot \frac{e^2}{kr\left(\int_l \frac{ds}{k}\right)^2}\,\mathbf{n}.$$

Appare da questa che se è

$$\frac{d\,\frac{1}{k}}{ds} = 0,$$

cioè le sezioni trasversali del tubo sono (o si possono ritenere sensibilmente) costanti. è

$$\Phi = \frac{e^2 k}{r l^2}\,\mathbf{n},$$

come nella Nota precedente (1).

Matematica. — *Sur certains cycles à deux dimensions des surfaces algébriques.* Nota di S. Lefschetz, presentata dal Corrispondente Castelnuovo.

1. L'objet de cette Note est de démontrer le théorème suivant: *A toute paire de courbes algébriques, algébriquement distinctes, d'une surface algébrique irréductible à singularités ordinaires, correspond un cycle à deux dimensions bien défini.*

Soit $F(x\,.\,y\,.\,z) = 0$ l'équation de la surface. m son ordre, $\{H_x\}$. $\{H_y\}$ les faisceaux découpés par les plans $x = \text{Cte}$. $y = \text{Cte}$. C_1, C_2. deux courbes algébriques de la surface, ne passant pas par les points bases de $\{H_y\}$. hypothèse qui ne diminue en rien la généralité. Soient encore $M_1^1 . M_2^1 . \ldots M_{m_1}^1$. les points du groupe $C_1 H_y$, $M_1^2, M_2^2, \ldots M_{m_2}^2$, ceux du groupe $C_2 H_y$. Traçons une ligne quelconque de M_h^1 à M_k^2 dans H_y. et faisons décrire à la variable complexe y un cercle de grand rayon γ. Soient ζ_h^1, ζ_k^2, les lieux de M_h^1 e M_k^2. Φ_{hk} la surface engendrée par la

(1) Le formole di questa furono dedotte sfruttando la circostanza che le forze elettriche. nei punti della superficie del conduttore, devono esser dirette normalmente agli elementi superficiali cui si riferiscono. Questa circostanza mi indusse a stabilire la relazione $\Phi \times \mathbf{t} = 0$, ciò che è legittimo solo nella ipotesi che il conduttore abbia sezione trasversale costante. Basta pensare ad es. ad un anello a sezione circolare variabile. È però interessante la coincidenza dei risultati ottenuti coi due metodi distinti, quando la sezione è costante, nel qual caso anche il primo metodo è perfettamente legittimo.

ligne $M_h^1 M_k^2$. Les lignes ζ_h^1, ζ_k^2 sont fermées si les axes sont arbitraires, car alors le plan de l'infini n'est tangent ni à C_1, ni à C_2, et quand y décrit γ, M_h^1 et M_k^2 sont ramenés à leur position primitive. ζ_h^1 et ζ_k^2 forment la frontière complète de Φ_{hk}. Si l'on remplace le chemin $M_h^1 M_k^2$ par un autre, les deux ne différeront que d'un cycle linéaire σ de H_y. Le lieu de σ quand y décrit γ, est une surface fermée correspondant à un résidu à l'infini pour les intégrales doubles, ou comme nous le dirons, c'est un *cycle résiduel*. Un tel cycle est à considérer comme nul, car il peut être réduit par déformation, à une ligne ordinaire de la surface (dans ce cas la position de σ pour $y = \infty$).

2. L'ensemble des lignes ζ_h^1 forme frontière complète pour une certaine aire fermée Ψ_1 de C_1, puisqu'elles entourent les points à l'infini. De même on aura une aire fermée Ψ_2 de C_2, dont les lignes ζ_k^2 forment la frontière complète. Avec les notations de Poincaré dans ses études d'Analyse Situs, on a les congruences

$$\Phi_{hk} \equiv \zeta_k^2 - \zeta_h^1 \quad , \quad \Psi_1 \equiv \Sigma \zeta_h^1 \quad , \quad \Psi_2 \equiv \Sigma \zeta_k^2 .$$

Par suite

$$\Gamma = m_1 \Psi_2 - m_2 \Psi_1 + \Sigma \Phi_{hk} \equiv 0 ,$$

c'est à dire que Γ est un cycle à deux dimensions de notre surface algébrique. D'après une remarque faite plus haut, quand on change la forme des lignes $M_h^1 M_k^2$ on ne fait qu'ajouter à Γ des cycles résiduels, c'est à dire des cycles nuls. Γ est donc bien défini. *C'est le cycle que nous avions en vue.* Il faut montrer que l'on n'a pas $\Gamma \sim 0$.

3. Pour atteindre notre objet, il suffit de montrer qu'il existe une intégrale double de deuxième espèce, sous la forme dite *normale*

$$(1) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)}{F'_z} \, dx \, dy , \qquad (P \text{ polynome adjoint}),$$

à période non nulle par rapport à Γ. En effet, d'après les travaux classiques de Mr. Picard, le nombre de telles intégrales à périodes non nulles, est précisément celui des cycles à deux dimensions.

Tout d'abord je dis que

$$(2) \qquad \iint_{\Psi_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} \, dx \, dy = 0 \quad , \quad \iint_{\Psi_2} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} \, dx \, dy = 0 .$$

Transformons birationnellement la surface F, en une autre F_1, d'équation $F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$, au moyen d'un système linéaire D, découpé par des surfaces adjointes $\sum_1^4 \lambda_i \varphi_i(x, y, z) = 0$, la transformation étant définie par

$$x_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_4} \quad , \quad y_1 = \frac{\varphi_2}{\varphi_4} \quad , \quad z_1 = \frac{\varphi_3}{\varphi_4} .$$

Supposons le système |D| choisi de telle manière que. D_i étant la courbe déterminée par $\varphi_i = 0$, C_1 fasse partie de D_2. Le jacobien $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)}$ ne s'annulle identiquement que sur D_4. De plus, comme les axes sont arbitraires, C_1 ne fait pas partie de la courbe simple de F, pour laquelle $F'_z = 0$. Le jacobien ci-dessus ne s'annulera donc qu'en un nombre fini de points de Ψ_1. Entourons chacun d'eux d'un petit circuit sur C_1, et soit Ψ'_1 la somme des aires que ces circuits renferment. Posons enfin $\Psi''_1 = \Psi_1 - \Psi'_1$. La quantité

$$\left| \iint_{\Psi'_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} dx\, dy \right|,$$

est évidemment très petite. D'ailleurs si $\overline{\Psi}''_1$ est la transformée de Ψ''_1 sur F_1, comme $y_1 = 0$ en tous les points de $\overline{\Psi}''_1$, on a

$$\iint_{\Psi''_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} dx\, dy = \iint_{\overline{\Psi}''_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)} dx\, dy = 0,$$

ce qui suffit pour démontrer la première équation (2), et par suite aussi la deuxième.

4. D'après ce qui précède la période par rapport à Γ, est donc égale à la valeur de l'intégrale étendue aux surfaces Φ_{hk}. C'est par suite le résidu à l'infini de la fonction

$$w(y) = \sum_{h,k} \int_{M_h^1}^{M_k^2} \frac{P(x, y, z)\, dx}{F'_z},$$

qui y est d'ailleurs régulière. Les fonctions de ce genre, correspondant à l'intégrale abélienne

$$\int \frac{P(x, y, z)\, dx}{F'_z}, \tag{3}$$

relative à H_y, ont déjà été étudiées par Poincaré (Annales de l'Ecole Normale, 1909; Archiv für Math. 1911). Quoiqu'il se soit limité surtout au cas où (3) est de première espèce, certaines de ses conclusions s'appliquent encore ici. En particulier nous avons

$$w(y) = \sum_j \frac{\mu_j}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j(Y)\, dY}{Y - y} + E(y), \tag{4}$$

où: 1°) les plans $y = b_j$, sont les plans du faisceau $y = \text{Cte}$, tangents à F. 2°) $\Omega_j(y)$ est une période de (3) correspondant au cycle linéaire de H_y qui devient très petit pour $y = b_i$. 3°) $E(y)$ est un polynome de degré

$\nu - m + 2$, ν étant le degré de P. 4°) Les μ sont des entiers indépendants de l'intégrale particulière (3) choisie.

Supposons que (3) se réduise à une intégrale de première espèce. On aura, si A est un point base de $\{H_y\}$,

$$(5) \qquad \sum_{h,k} \int_{M_h^1}^{M_k^2} du = m_1 \sum_k \int_A^{M_k^2} du - m_2 \sum_h \int_A^{M_h^1} du .$$

D'ailleurs (Poincaré)

$$\sum_h \int_A^{M_h^1} du = \sum \frac{\lambda_j^1}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j'(Y)\, dY}{Y - y} + e_1(y) ,$$

$$\sum_k \int_A^{M_k^2} du = \sum \frac{\lambda_j^2}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j'(Y)\, dY}{Y - y} + e_2(y) .$$

où la période Ω_j' correspond à Ω_j pour u, et ces sommes sont les « fonctions normales » de l'illustre géomètre. Rappelons les propriétés suivantes :

1°. Toute période est une fonction normale. Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{2p}$, $2p$ périodes fondamentales, p étant le genre des sections planes de la surface. Les entiers $l_1^i, l_2^i, \ldots l_N^i$, formant le système des λ pour ω_i, ne dépendent pas de l'intégrale de première espèce choisie.

2°. Si $C_1 = C_2$, on a $\lambda_j^1 \equiv \lambda_j^2$, modulo $l_j^1, l_j^2, \ldots l_j^{2p}$. Plus généralement soient $C_1, C_2, \ldots C_s$, des courbes algébriques ne passant pas par les points bases de $\{H_y\}$, $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots \lambda_N^i$, les λ pour C_i. Si $\sum t_i C_i = 0$, on a aussi $\sum t_i \lambda_j^i \equiv 0$, modulo $l_j^1, l_j^2, \ldots l_j^{2p}$.

Des relations (3), (4), (5), on tire $\mu_j = m_1 \lambda_j^2 - m_2 \lambda_j^1$. De (5) on déduit en prenant le résidu à l'infini de $w(y)$, la valeur

$$(6) \qquad \sum_j \mu_j \int_b^{b_j} \Omega_j(Y)\, dY ,$$

pour la période de l'intégrale double (1) par rapport au cycle Γ. En remarquant que cette période est indépendante de b, et par suite a une dérivée nulle par rapport à b, on obtient la relation $\sum \mu_j \Omega_j'(b) = 0$, ce qui vérifie que (6) est bien une période de (1) (Picard).

La période obtenue est évidemment nulle si $C_1 = C_2$, quand (1) est de seconde espèce, résultat que l'on peut déduire de la définition de Γ.

5. Pour achever la démonstration, nous aurons recours aux intégrales doubles sous forme normale et en même temps du type

$$(7) \qquad \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy$$

dont Mr. Picard a fait un usage constant, les ayant d'ailleurs introduites. Nous dirons des intégrales du type (7), qu'elles sont *impropres de deuxième espèce*. On peut évidemment supposer que le nombre ϱ de Mr. Picard est > 1. Soit $D_1, D_2, \ldots D_{\varrho-1}$ un système de courbes formant base avec celle à l'infini. $g_i(x, y) = 0$ la projection de D_i. D_i' étant l'autre courbe de F avec la même projection. Il y a alors $\varrho - 1$ intégrales doubles telles que

$$\int\int \frac{Q_i(x, y, z)}{F_z'}\, dx\, dy = \int\int \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y}\right) dx\, dy\,, \tag{8}$$

(U_i, V_i, du tipe $\dfrac{K(x, y, z)}{\varphi(y)\, g_i(x, y)\, F_z'}$; K polynome adjoint nul sur D_i', $\varphi(y)$ polynome).

telles que toute intégrale impropre de seconde espèce sous forme normale soit une combinaison linéaire de celles-ci, à une intégrale à périodes nulles près (Picard). Posons

$$\varepsilon(x, y) = \int^{x, y} \frac{Q_i(x, y, z)\, dx}{F_z'}\,.$$

Cette fonction est holomorphe en tout point à distance finie, extérieur aux plans $y = b_i$. Soit B_i le point de contact de $y = b_i$. Pour tous les points de ce plan autres que B_i, on peut toujours choisir le chemin d'intégration de manière que ε soit holomorphe en leur voisinage. Cela revient simplement à choisir une détermination convenable pour ε.

Ceci posé, l'intégrale suivante déjà considérée par Mr. Picard.

$$\int (U_i - \varepsilon)\, dy - V_i\, dx\,, \tag{9}$$

est une intégrale de différentielles totales, car la condition d'intégrabilité est satisfaite. Soit $y - y_j = 0$, α_j la période logarithmique de (9) relative à H_{y_j}. On peut soustraire de (9) une intégrale de différentielles totales

$$\sum \int \frac{\alpha_j\, dy}{y - y_j}$$

de façon à éliminer les courbes logarithmiques du faisceau $\{H_y\}$. Cela revient à soustraire de U_i une fonction de y seul, ce qui ne change pas $\dfrac{\partial U_i}{\partial x}$. Les intégrales abéliennes

$$\int U_i\, dy \quad , \quad -\int V_i\, dx\,.$$

relatives à H_x, H_y, respectivement, auront alors comme seuls points loga-

rithmiques à distance finie, ceux des groupes $H_x D_i . H_y D_i$, avec des périodes égales pour toutes deux à une même constante que l'on peut supposer égale à *un*.

6. Le plan à l'infini étant arbitraire, on peut supposer que $U_i . V_i$. ne deviennent infinies nulle part sur les Φ. On aura alors, en appliquant une transformation bien connue, pour la période de (8) par rapport à Γ. la valeur

$$\sum_{hk} \iint_{\Phi_{hk}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$= m_1 \sum_k \int_{\zeta_k^2} (U_i\, dy - V_i\, dx) - m_2 \sum_h \int_{\zeta_h^1} (U_i\, dy - V_i\, dx) .$$

Le coefficient de m_2 dans cette relation est égal à la somme des périodes logarithmiques à l'infini de l'intégrale abélienne

$$\int U_i\, dy - V_i\, dx ,$$

relative à C_1, et par suite égale à celle des périodes logarithmiques à distance finie. Les seuls points logarithmiques à distance finie, sont ceux du groupe $C_1 D_i$, et ceux où $\varphi(y) = 0$. On pourra toujours supposer que parmi ces points ne se trouvent aucun des points B, et par suite, on pourra toujours choisir pour ε une détermination holomorphe au voisinage de l'un d'eux. Soit M un des points du premier type, M′ un du second, η, η' deux petits circuits autour de M, M′, dans C_1, $\varepsilon_1 . \varepsilon_1'$ deux détermination de ε holomorphes autour de M, M′, respectivement. On a

$$\int_\eta U_i\, dy - V_i\, dx = \int_\eta (U_i - \varepsilon_1)\, dy - V_i\, dx = 1 .$$

$$\int_{\eta'} U_i\, dy - V_i\, dx = \int_{\eta'} (U_i - \varepsilon_1')\, dy - V_i\, dx = 0 .$$

En désignant comme d'habitude par [CD] le nombre de points du groupe CD commun à deux courbes C, D, le coefficient de m_2 dans l'expression obtenue pour la période de (8) par rapport à Γ, est donc égal à $[C_1 D_i]$. De même celui de m_1 est $-[C_2 D_i]$. D'où pour cette période la valeur $[(m_2 C_1 - m_1 C_2) D_i]$. Elle est nulle si $m_2[C_1 D_i] = m_1[C_2 D_i]$. D'ailleurs si E est une section plane, on a $m_2[C_1 H] = m_1[C_2 H] = m_1 m_2$. Donc si toutes les périodes des intégrales doubles (8) par rapport à Γ étaient nulles, on aurait $m_2[C_1 D] = m_1[C_2 D]$, pour toute courbe D de F, et par suite, (Severi), $t m_2 C_1 = t m_1 C_2$. Ainsi si C_1 et C_2 sont algébriquement distinctes, il y a au moins une intégrale double de seconde espèce à période non nulle par rapport à Γ, et l'on n'a pas $\Gamma \sim 0$. C.Q.F.D.

7. Soit Γ_1 le cycle analogue à Γ, et relatif aux courbes D_1, H, dans l'ordre nommé. Posons $m D_i - n_i H = G_i$, où n_i est l'ordre de D_i. Les courbes $G_1, G_2, \dots G_{\rho-1}, H$, forment base. Le déterminant des périodes des intégrales (8) par rapport aux cycles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_{\rho-1}$, est égal à

$$|[G_j D_i]|,$$

et par suite il n'est pas nul. Donc, étant donnée l'intégrale de seconde espèce (1), il existe des constantes non toutes nulles a, telles que les périodes de

$$\iint \frac{P(x, y, z) - \sum_i a_i Q_i(x, y, z)}{F'_z} dx\, dy$$

qui est aussi sous forme normale, par rapport aux cycles Γ, soient toutes nulles.

On vérifie d'ailleurs par un calcul assez simple, que si

$$t_1 C_1 = t_0^1 H + \sum t_i^1 D_i \quad , \quad t_2 C_2 = t_0^2 H + \sum_i t_i^2 D_i ,$$

on a

$$m t_1 t_2 \Gamma \sim \sum (m_1 t_2 t_i^1 - m_2 t_1 t_i^2) \Gamma_i .$$

En définitive parmi les cycles Γ, il y en a $\rho - 1$ linéairement indépendants, et les cycles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_{\rho-1}$, forment base, pour ceux de ce type.

Matematica. — *Sovra certe equazioni di composizione di seconda specie.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. In questa breve Nota proseguiamo una ricerca iniziata in due precedenti Note (1).

Ci proponiamo ora di assegnare la soluzione generale delle equazioni di composizione del tipo

$$(1) \qquad \overset{xx}{f}(\overset{xx}{u}) = a_1 u + a_2 \overset{xx}{u^2} + \dots + a_m \overset{xx}{u^m} = \nu(xy) ,$$

ove $\nu(xy)$ sia un nucleo di Goursat ed abbia perciò la forma:

$$\nu(xy) = \sum a_{rs}^{I} h_r(x) k_s(y) .$$

(1) G. Andreoli. *Sulla risoluzione di certe equazioni di composizione*; *Sulla soluzione generale d'una classe di equazioni di composizione*. Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXV, ser. 5ª, 2° sem. 1916.

Possiamo subito osservare che, per noti teoremi, dalle due successioni

$$k_1(x), k_2(x), \dots$$
$$k_1(x), k_2(x), \dots$$

si può sempre dedurre, mediante combinazioni lineari, un sistema ortogonale normalizzato:

$$p_1(x), p_2(x), \dots p_\rho(x)$$
$$q_1(x), q_2(x), \dots q_\rho(x).$$

Si può scrivere dunque:

$$\nu(xy) = \sum \alpha_{rs} p_r(x) q_s(y).$$

2. Supporremo dapprima che, in particolare, sia

$$\nu(xy) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(y)$$

e che l'equazione algebrica

$$f(\xi) = 0$$

ammetta solo radici semplici. Notiamo che se fra le α_r ve ne sono ϱ_1 eguali ad α; ϱ_2 eguali a β e così via, il nucleo ν si scrive sotto la forma:

$$\nu(xy) = \alpha \sum_1^{\varrho_1} p_r(x) q_r(y) + \beta \sum_{\varrho_1}^{\varrho_2} p_r(x) q_r(y) + \gamma \sum_{\varrho_2}^{\varrho_3} p_r(x) q_r(y) + \dots$$

con $\alpha, \beta, \gamma \dots$ tutte diverse fra loro.

Quindi, se indichiamo con $F(\xi) = 0$ l'equazione algebrica che ha per radici semplici tutte e sole le $\alpha, \beta, \gamma, \dots \theta$, possiamo dire che il nucleo ν soddisfa all'equazione di composizione

$$\overset{xy}{F}(\nu) = 0;$$

e questa sarà l'equazione di composizione, privata del termine noto, e di grado minimo cui esso soddisfa.

Tenendo presente la (1), vediamo che la u, se esiste effettivamente, deve certamente soddisfare l'equazione di composizione:

$$\overset{xx\ xx\ xx}{F}(f(u)) = 0. \tag{2}$$

3. Intanto osserviamo che — per le ipotesi fatte — l'equazione algebrica

$$F(f(\xi)) = 0 \tag{3}$$

è a radici semplici.

Quindi. la più generale soluzione della (2) è data da un nucleo

$$\mu = \sum c_r \xi_r(x) \eta_r(y)$$

con le ξ, η formanti sistema biortogonale normalizzato. e le c_r radici della (3).

Ma noi vogliamo che questa soluzione soddisfi anche la (1); e perciò deve essere:

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{\mu}) = \nu .$$

Per i risultati ottenuti nelle Note precedenti. e per la speciale forma di μ. si ha:

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{\mu}) = \sum f(c_r) \xi_r(x) \eta_r(y) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(y) . \tag{4}$$

Da quest'ultima eguaglianza segue che il sistema biortogonale (ξ, η) deve comprendere quello $(p . q)$ (o un suo trasformato mediante una trasformazione lineare biortogonale: ciò che non cambia il ragionamento). Quindi esso si otterrà aggiungendo alle p delle funzioni u, ortogonali alle q; alle q delle funzioni v ortogonali alle p; le u e v essendo biortogonali fra loro.

Epperò resta:

$$\sum_1^{\rho} f(c'_r) p_r(x) q_r(y) + \sum_1^{\sigma} f(c''_s) u_s(x) v_s(y) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(y) , \tag{5}$$

ove c' e c'' stanno ad indicare i due gruppi in cui si dividonò le c.

Ma quest'ultima eguaglianza può sussistere solo se si ha separatamente:

$$\sum_1^{\rho} f(c'_r) p_r(x) q_r(y) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(y)$$

$$\sum_1^{\sigma} f(c''_s) u_s(x) v_s(y) = 0 .$$

Basta. infatti. moltiplicare la (5) per una qualunque coppia $p_r(x) q_r(y)$ ed integrare rispetto alla x ed alla y nel campo fissato. per avere:

$$f(c'_r) = \alpha_r .$$

e operare analogamente con la $u_s(x) v_s(y)$ per avere:

$$f(c''_s) = 0 .$$

4. Si vede quindi che vale il

TEOREMA. — *La soluzione generale dell'equazione di composizione:*

$$\overset{\times\times}{f}\overset{\times\times}{(n)} = \sum \alpha_r \, p_r(x) \, q_r(x),$$

nell'ipotesi che l'equazione algebrica $f(\xi) = 0$ *sia a radici distinte, si ottiene aggiungendo al nucleo*

$$n_1 = \sum c'_r \, p_r(x) \, q_r(y) \quad ; \quad f(c'_r) = \alpha_r$$

il nucleo ad esso ortogonale

$$n_2 = \sum c''_s \, u_s(x) \, v_s(y) \quad ; \quad f(c''_s) = 0$$

soluzione della

$$\overset{\times\times}{f}\overset{\times\times}{(n)} = 0 .$$

Infatti, pel ragionamento fatto sinora, n_1 ed n_2 saranno ortogonali, perchè formati con funzioni appartenenti a porzioni (che non hanno parte comune) dello stesso sistema biortogonale.

Se il numero delle p è ϱ, e se la f è di grado m, la n_1 avrà m^ϱ forme differenti in corrispondenza appunto alla scelta delle c'.

Per esempio, consideriamo la

$$\overset{\times\times}{n^2} = 3n - 2(p_1(x) \, q_1(y) + p_2(x) \, q_2(y) + p_3(x) \, q_3(y)) .$$

Si ha:

$$f(\xi) = \xi^2 - 3\xi \quad ; \quad \alpha_r = -2 \qquad (r = 1 , 2 , 3).$$

Per ottenere le c'_r bisogna risolvere la

$$f(c') - \alpha_r = \xi^2 - 3\xi + 2 = 0 ,$$

che dà $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$.

Quindi il nucleo n_1 sarà dato da

$$n_1 = 2 \sum p'_r(x) \, q'_r(x) + \sum p''_r(x) \, q''_r(x) = 2n' + n'' \quad (\nu = n' + n'').$$

ed inoltre

$$n_2 = 3 \sum u_r(x) \, v_r(y) = n''' ,$$

ove le $p' . q'$ sono alcune delle $p . q$; $p'' . q''$ le rimanenti; le $n' . n'' , n'''$ sono ortogonali fra loro.

Infatti si ha, tenendo presente che $(\overset{\times\times}{n'})^2 = n'$; ... :

$$(2\overset{\times\times}{n'} + \overset{\times\times}{n''} + 3\overset{\times\times}{n'''})^2 - 3(2n' + n'' + 3n''') + 2(n' + n'') =$$
$$= 4(\overset{\times\times}{n'})^2 + (\overset{\times\times}{n''})^2 + 9(\overset{\times\times}{n'''})^2 - 6n' - 3n'' - 9n''' + 2n' + 2n''$$

che è identicamente nullo.

5. Passiamo ora a trattare il caso che la ν non abbia quella forma particolare, o che la $f(\xi) = 0$ non abbia radici semplici.

È facile vedere che (1), dati due nuclei di Goursat appartenenti allo stesso sistema biortogonale (o ciò. che è lo stesso. di cui uno dei sistemi comprenda l'altro) e differenti quindi per i soli coefficienti α; chiamata « *matrice relativa* » del nucleo ν la matrice:

$$\mathrm{A} \equiv \|\alpha_{rs}\| ; \qquad (r, s = 1, 2, \ldots \varrho)$$

sussistono i lemma

I. *La matrice relativa* A *di un nucleo* ν, *composto mediante due altri nuclei, le cui matrici relative sieno* A_1 *ed* A_2, *è data da*

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 .$$

II. *La matrice relativa* B *di un nucleo* ν, *somma di due altri nuclei, le cui matrici relative sieno* B_1 *e* B_2, *è data da*

$$\mathrm{B} \equiv \mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 .$$

Il quadro delle α_{rs} va ovviamente completato con degli zeri. al posto dell'α_{rs}, se nel nucleo ν non figura il prodotto $p_r(x)\, q_s(y)$; inoltre ν sarà il nucleo relativo ad A, nel sistema (p, q).

Tali due lemma mostrano che il calcolo di composizione sui nuclei ν appartenenti allo stesso sistema biortogonale coincide col calcolo delle loro matrici relative; e reciprocamente ogni relazione intercedente fra le matrici può essere direttamente letta come una relazione di composizione fra i nuclei relativi, scelti tutti in uno stesso sistema.

Ad ogni matrice corrisponde un nucleo relativo ed uno solo, in ogni sistema (p, q): ad ogni nucleo una ed una sola matrice relativa.

Intanto noi sappiamo che la matrice A soddisfa coll'equazione caratteristica:

$$\Gamma(\mathrm{A}) \equiv \gamma_1 \mathrm{A} + \gamma_2 \mathrm{A}^2 + \cdots + \gamma_\sigma \mathrm{A}^\sigma \equiv \|0\| ;$$

quindi, a sua volta il nucleo ν soddisfa all'equazione di composizione:

$$\overset{\times\times}{\Gamma}(\overset{\times\times}{\nu}) = 0 .$$

(1) Cfr. Volterra, *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie*, Rend. R. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. XX.

Epperò n, se esiste, deve soddisfare certamente all'equazione di composizione

$$\overset{\times\times}{\Gamma}(\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n})) = \gamma_1 \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) + \gamma_2 (\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}))^2 + \cdots + \gamma_\sigma (\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n})^\sigma = 0 .$$

Richiamando i risultati delle due Note precedenti, vediamo che la soluzione generale di questa equazione è un nucleo di Goursat

$$\mu = \sum g_{rs}\, \chi_r(x)\, \eta_s(y) ,$$

ove $\chi . \eta$ sono funzioni di un sistema biortogonale. Quindi, a sua volta, l'espressione $\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{\mu})$ sarà della stessa forma:

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{\mu}) = \sum l_{rs}\, \chi_r(x)\, \eta_s(y) ,$$

ove le l si ricavano subito dalle g.

Se si vuole che μ ci dia proprio la n, dovrà essere:

$$\sum l_{rs}\, \chi_r(x)\, \eta_s(y) = \sum a_{rs}\, p_r(x)\, q_s(y) . \tag{6}$$

La (6) implica che il sistema biortogonale (o un suo trasformato mediante una trasformazione lineare biortogonale, ciò che è lo stesso) (p , q) sia compreso nel sistema (χ , η).

Epperò, scelto un qualunque sistema $\chi . \eta$ che comprenda (p , q); chiamata H la nuova matrice ottenuta orlando con zero la matrice A [relativa a ν nel sistema (p , q), mentre la nuova è relativa a ν nel sistema $(\chi . \eta)$], e detta G la matrice relativa ad n nel sistema (χ , η), si dovrà avere:

$$a_1 \mathrm{G} + a_2 \mathrm{G}^2 + \cdots + a_m \mathrm{G}^m = \mathrm{H} .$$

Quindi abbiamo il

Teorema II. — *La soluzione generale dell'equazione di composizione*

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = \nu ,$$

ove ν sia un qualunque nucleo di Goursat, si ottiene risolvendo l'equazione fra matrici:

$$f(\mathrm{G}) = \mathrm{H}$$

e prendendo il nucleo relativo alla matrice G *nello stesso sistema biortogonale (ξ , η) comprendente quello primitivo di ν, rispetto al quale si è presa la matrice relativa* H *del nucleo ν.*

Per $\nu = 0$ si ritrovano i risultati delle Note precedenti; però lo svolgimento in esse dato è necessario, poichè permette appunto di assegnare la forma delle soluzioni, mentre col presente metodo, noi ci limitiamo a verificare che se la soluzione è di una certa forma, sussiste una certa relazione algebrica fra i coefficienti g del nucleo n, senza mostrare che effettivamente quella data sia la forma più generale di soluzione.

Meccanica celeste. — *Sopra le distanze planetarie dal Sole.* Nota di G. Armellini, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meteorologia. — *Andamento annuale della pressione barometrica in Italia.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

La pressione barometrica presenta, durante l'anno, un andamento particolare che pei luoghi continentali suole manifestarsi con un aumento di essa nei mesi a temperatura più fredda, e una diminuzione nei mesi a temperatura più calda; mentre, nei luoghi sottoposti alla diretta influenza dei mari, si osserva un andamento contrario. Nelle regioni che risentono dell'influenza tanto del mare che della terraferma, si ha un andamento annuale della pressione ben diverso e che può individuarsi con due massimi e due minimi.

Oltre a tali ondulazioni principali nelle diverse curve esprimenti l'andamento su riferito, qualora si considerino valori relativi a periodi più brevi del mese ossia alla decade o alla pentade, si riscontrano altre ondulazioni che sembrano presentare i medesimi caratteri per gli stessi luoghi di una data regione ed essere in stretta relazione con gli andamenti annuali delle precipitazioni atmosferiche. Alcune di tali ondulazioni permangono nei valori mensili e si individuano distintamente sì da lasciare traccia nell'andamento annuale costituendo un terzo massimo e un terzo minimo.

La causa a cui debbono attribuirsi i su citati andamenti è tuttora non nota, forse per la mancanza di dati, ma più ancora per la complessità dei fenomeni meteorici che vi agiscono.

Le ricerche sul proposito sono abbastanza limitate, e i più si occupano della variazione annuale della pressione barometrica incidentalmente, venendo a trattare del clima nelle monografie speciali che illustrano gli elementi climatici di una singola città o località.

Questo stato di cose si rispecchia in gran parte nelle conoscenze climatiche dell'Italia, e difatti, ad eccezione del lavoro pregevole degli astronomi Schiaparelli e Celoria sulle variazioni annuali della pressione barometrica in Milano (1), ove i valori ottenuti vengono messi a raffronto con quelli

(1) Schiaparelli V. e Celoria C., *Sulle variazioni periodiche del barometro nel clima di Milano* (Supplemento alla Meteorologia italiana). Vol. I, anno 1867.

di Bologna e di Trieste. e del lavoro del Ragona per Modena (1), si trovano cenni soltanto di carattere generale nelle diverse monografie climatiche relative a periodi diversi; cosicchè mancano gli elementi per considerare il comportamento dell'andamento annuale della pressione su tutta la nostra penisola.

Schiaparelli e Celoria esaminarono le osservazioni barometriche eseguite a Milano dal 1835 al 1859. e l'andamento annuale dei valori medii venne messo a raffronto con gli andamenti ottenuti da Respighi per Bologna sulla base di 45 anni di osservazione e da Jelinek per Trieste sulla base di 16 anni. Rappresentando le curve annuali, gli Autori notarono parallelismo fra queste curve e ne dedussero che sull'Italia superiore l'andamento annuo della pressione barometrica è rappresentato da tre massimi e da tre minimi che cadono alle seguenti epoche:

	Milano	Bologna	Trieste
Massimo principale	1 gennaio	25 dicembre	15 gennaio
Minimo principale	17 aprile	22 aprile	13 aprile
1° massimo secondario	25 giugno	1 luglio	21 giugno
1° minimo secondario	25 luglio	25 luglio	5 luglio
2° massimo principale.	22 settembre	2 ottobre	18 settembre
2° minimo principale	2 novembre	2 novembre	7 novembre

Di queste tre onde una. che ha luogo nei mesi invernali, è grandissima e si estende dal massimo principale al minimo principale; le altre due onde sono molto minori. e dal massimo al minimo la pressione varia di frazioni di millimetro. specie per Bologna. La prima delle onde secondarie è poco sensibile a Trieste. mentre l'altra è più accentuata; la seconda onda secondaria sembra avere presso a poco eguale importanza a Milano e a Bologna.

Aggiungono gli Autori che il numero degli anni presi in esame è abbastanza limitato e tale da non dare perfetta cognizione dell'andamento annuo della pressione barometrica: occorrerebbero dati estesi ad un periodo maggiore (almeno di 100 anni) per definire tale andamento con qualche sicurezza, e pertanto qualche minima differenza che presentano i predetti diagrammi, non può attribuirsi se non all'insufficienza delle osservazioni.

Gli studiosi che successivamente hanno considerato le osservazioni barometriche, hanno confermato la presenza di tre onde nell'andamento annuale, cosicchè il Roster (2) credette di poter dire che la legge che presiede all'andamento annuale della pressione è con ogni probabilità la stessa per tutta l'Italia.

(1) Ragona D., *Andamento annuale della pressione barometrica* (Supplemento alla Meteorologia italiana). Fasc. II, anno 1877.

(2) Roster G., *Climatologia dell'Italia*. Torino, 1909.

Recentemente Angot (1) pubblicò un importante lavoro sulla variazione della pressione in Francia e in esso sono anche esaminate le osservazioni barometriche eseguite a Milano pel 1851-1900 ed a Torino, Moncalieri, Modena, Genova per un periodo minore di anni; ma queste ultime vennero ridotte al periodo cinquantennale confrontandole con le osservazioni rilevate a Milano, Ginevra, Marsiglia e Trieste. L'A., considerando i valori medii mensili delle diverse città, ne tracciò l'andamento annuale e vi distinse cinque tipi, quattro dei quali presentano distintamente due massimi in inverno e in estate e due minimi in primavera ed autunno con una piccola oscillazione nel mese di agosto, ove la pressione è nettamente più bassa di quella dei mesi di luglio e di settembre.

Variano però da tipo a tipo i mesi degli estremi, potendosi presentare spostamenti di un mese. Per quasi tutta la Francia vale il tipo IV che dà il massimo principale in gennaio il secondario in settembre, il minimo principale in aprile e il secondario in ottobre.

L'A. trova inoltre un quinto tipo che chiama della regione sud-est, e aggiunge che è notato sull'alta Italia col massimo principale in gennaio, il secondario in settembre, il minimo principale in aprile e il secondario in ottobre. Non si ha adunque cenno alcuno del terzo massimo e minimo già trovati da altri autori.

Gli studî così elencati portano a non affermare un'identità di andamento della pressione barometrica, anzi dallo studio di Angot si verrebbe ad attribuire all'alta Italia un andamento ben diverso da quello riscontrato dagli studiosi italiani. E d'altra parte, per un paese come il nostro, molto esteso in latitudine, può pensarsi che una certa diversità debba verificarsi da luogo a luogo. Sembra pertanto utile contribuire alla risoluzione di tali quesiti, prendendo a base della ricerca un uguale periodo di anni di osservazioni barometriche, e contemporaneamente per diverse località, sì da prospettare l'andamento su tutta la nostra penisola.

Il periodo più uniforme è quello che si estende dal 1881 al 1915, ossia per un trentacinquennio; e per esso diamo qui appresso i valori medî mensili ed annuali per 12 città italiane.

Avvertiamo che le medie mensili provengono dalle medie diurne risultano dalle osservazioni eseguite a 9^h, 15^h, 21^h: e non abbiamo fatto subire ad esse correzione alcuna per ridurle al vero medio diurno, perchè tuttora manca uno studio completo sull'argomento e dalle ricerche fatte, benchè limitate a pochi anni, sembra non esservi bisogno di apportare riduzione. Si intende che le osservazioni sono ridotte soltanto alla temperatura di zero gradi, ma non ridotte al livello del mare e per ragioni tipografiche si è soppressa la prima cifra che è il sette.

(1) Angot A., *Études sur le climat de la France. Pression atmosphérique.* Annales du Bureau Central Météorologique de France, année 1906. I, Mémoires, Paris, 1910.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno
Udine	53,79	52,53	50,56	49,14	50,21	50,56	50,66	51,05	52,45	51,84	52,45	52,59	51,49
Padova	61,66	60,23	57,79	56,72	57,63	57,83	57,82	58,36	59,78	59,41	60,25	60,24	58,97
Milano	51,42	49,61	47,41	46,27	47,53	47,88	48,01	48,49	49,69	49,07	50,18	50,13	48,80
Torino	39,78	38,18	35,69	34,98	35,96	36,78	36,79	37,24	38,30	37,64	38,37	38,31	37,28
Modena	58,87	57,58	54,67	53,59	54,79	54,88	55,04	55,23	56,65	56,29	57,46	57,62	56,05
Genova	58,46	57,09	55,01	54,29	55,61	56,13	56,24	56,48	57,31	56,47	57,11	56,99	56,43
Pesaro	63,20	61,61	59,28	58,24	58,87	59,55	59,51	59,86	61,12	60,79	61,64	61,56	60,43
Firenze	57,13	55,69	54,06	53,00	54,19	54,67	54,42	55,00	56,01	55,56	56,03	55,97	55,14
Roma	58,34	57,66	56,14	55,09	56,37	57,02	56,90	57,14	58,24	57,77	58,13	57,99	57,23
Napoli	49,50	49,11	47,28	46,42	47,86	48,50	48,68	48,79	49,63	48,97	49,24	48,86	48,34
Lecce	56,71	55,75	54,53	53,52	54,40	54,74	54,49	54,71	56,24	56,35	56,51	56,18	55,34
Palermo	56,83	56,16	54,99	54,07	55,41	55,92	55,98	56,08	56,57	56,29	56,52	56,13	55,91

Il massimo principale cade ovunque in gennaio e il minimo principale in aprile; e possiamo adunque stabilire queste due date come limiti principali per tutta l'Italia.

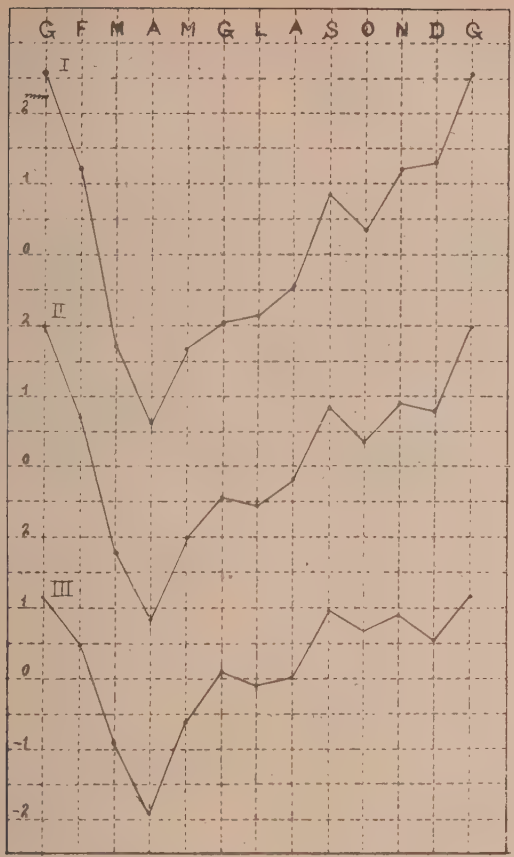
Uguale concordanza non si riscontra per la prima e la seconda onda secondaria; anzi possiamo dire che quest'ultima manca di generalità, inquantochè, verificandosi nel periodo giugno-agosto in cui la pressione subisce le minori variazioni, può manifestarsi nei valori mensili con differenze di qualche decimo che non appaiono però nelle rappresentazioni grafiche ove si riscontra piuttosto un quasi livellamento. Dai valori numerici su riferiti per Firenze, Roma, Pesaro, Lecce, Napoli si rileva come in luglio corrispondono valori di poco inferiori a quelli di giugno, il che consentirebbe, per queste località, di considerare luglio come secondo minimo secondario, e giugno come secondo massimo secondario. Per Padova, le pressioni di giugno e di luglio si possono ritenere eguali fra di loro. Per Milano, Udine, Genova e per Palermo si riscontra invece un lieve aumento del valore di luglio rispetto a quello di giugno. Sembra adunque che questa terza onda si individui maggiormente sulle regioni centrali e meridionali, e assuma minore importanza sulle regioni settentrionali e insulari, ove, in corrispondenza, riscontrasi quasi livellamento di pressione.

La seconda onda ha caratteri ben diversi; il primo massimo secondario cade ovunque in settembre, eccetto Lecce ove il massimo cade in ottobre, differendo la pressione di questo mese da quella di settembre di soli nove decimi. Riguardo al primo minimo secondario, esso appare distintamente in ottobre, eccetto per Napoli, Lecce e Palermo in cui cade in dicembre.

Da questo esame, basato su un periodo identico di anni di osservazioni, risultano pertanto alquanto modificate le idee che si avevano in proposito, inquantochè ci sembra riscontrarvi una variazione di andamento annuale con la latitudine la cui influenza però si esplica sulla 1ª e sulla 2ª onda secondaria che hanno un'ampiezza molto minore di quella propria della primaria. E quantunque le città esaminate non siano numerose, tuttavia, pel fatto che esse riguardano le diverse latitudini del nostro paese, e tenuto conto che per località vicine la variazione è minima, se non trascurabile, ci sembra potere distinguere tre tipi che possiamo denominare settentrionale, centrale e meridionale.

Al primo tipo includiamo le città di Udine, Padova, Milano, Modena, Torino; al secondo tipo Genova, Pesaro, Firenze e Roma; al terzo tipo Napoli, Lecce e Palermo; e a ciascuno di essi spettano i seguenti valori della deviazione media mensile dalla media annua.

Per dedurre questi valori si è calcolato separatamente per ciascuna città la deviazione della pressione media mensile dalla corrispondente annua, e dopo si è dedotta per ciascun mese del tipo dalla media delle diverse deviazioni spettanti alle città che formano il tipo.

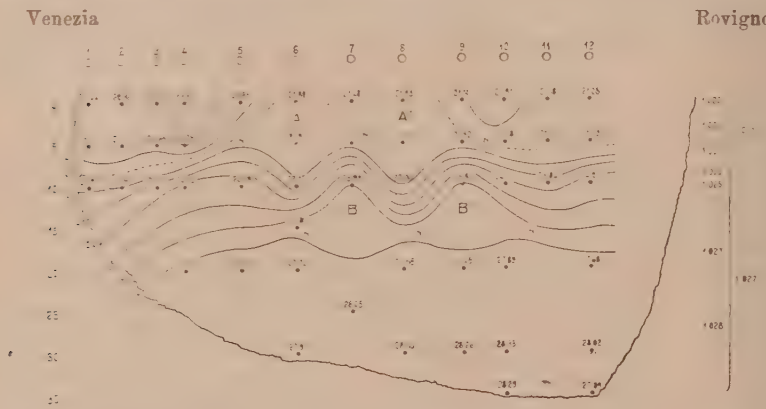


	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
Tipo settentr. . .	+2,58	+1,18	−1,29	−2,38	−1,29	−0,93	−0,85	−0,44	+0,86	+0,33	+1,22	+1,26
» centrale. . .	+1,07	+0,70	−1,18	−2,15	−1,04	−0,47	−0,54	−0,19	+0,86	+0,34	+0,92	+0,82
» merid. . . .	+1,15	+0,48	−0,93	−1,86	−0,64	+0,14	−0,15	0,00	+0,95	+0,67	+0,89	+0,53

E nel grafico 1° diamo la rappresentazione grafica che riassume quanto avanti abbiamo specificato. Notiamo infine che i valori della escursione annua, rispettivamente di 4,96, 4,12 e 3,01, mostrano una diminuzione sensibile con la latitudine, differendo di mm. 1,95 i valori relativi alle regioni settentrionali e meridionali.

Fisica terrestre. — *Le onde interne e le sesse dell'Adriatico superiore.* Nota di EMILIO ODDONE, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Le isoterme, isoaline ed isopicne presentano talora, nello strato di salto dei mari interni, delle ondulazioni regolari, gli studî sulle quali sono sunteggiati nei trattati di oceanografia. Ondulazioni di tale specie furono trovate nell'Alto Adriatico durante la crociera della R. nave Ciclope nell'agosto 1911 e vennero recentemente studiate dal prof. L. De Marchi (1). Il vicino grafico riproduce dal detto studio le linee di egual densità nel tratto adriatico della trasversale Venezia-Rovigno, addì 17 agosto 1911, e mostra le ondulazioni in regione di salto, tra due strati: uno inferiore, profondo una ventina di metri circa, a peso specifico medio maggiore; l'altro superiore, spesso circa dieci metri, a peso specifico minore.



I cerchietti, lungo le ascisse, indicano le stazioni sulle cui verticali si eseguirono le osservazioni. Le cifre sulle ordinate, alla sinistra, danno le profondità del mare in metri. I numeri interni esprimono i pesi specifici, o densità relativa, in millesimi della parte decimale ad es. per 20,44 leggere 1,02044. In base alle constatazioni della figura, abbiamo ritenuto nei calcoli, che i due fluidi sovrapposti avessero gli spessori più approssimati di $21^m,9$ l'inferiore; $8^m,1$ il superiore, e rispettivamente i pesi specifici medi di 1,027 e 1,021.

Per ricavare il periodo dell'ondulazione, il prof. De Marchi, in prima valutazione, impiega l'espressione

$$(1) \qquad T = \frac{\lambda}{V} = \frac{l}{4V}$$

(1) L. De Marchi, *Onde interne e propagazione di marea nell'Adriatico superiore.* Atti del R. Istituto Veneto di sc. lett. ed arti, vol. LXXV, parte 2ª, 1915-16.

nella quale λ è la lunghezza media delle onde osservate, l la larghezza dell'alto bacino adriatico (100.000^m), V la velocità dell'onda.

L'espressione di V toglie ai lavori teoretici di Stokes [1] e Lamb [1], per cui

$$V = \sqrt{g \frac{\varrho_i - \varrho_s}{\frac{\varrho_i}{h_i} + \frac{\varrho_s}{h_s}}}. \tag{2}$$

Sostituendo alle lettere i valori spettanti all'Alto Adriatico addì 17 agosto 1911, V assume un valore intorno a 0,6 $^m/_s$ e per la (1) viene

$$T = \frac{l}{4} \sqrt{\frac{1}{g h_i h_s}} \sqrt{\frac{\varrho_i h_s + \varrho_s h_i}{\varrho_i - \varrho_s}} = 42.500^s \text{ circa}. \tag{1^{bis}}$$

Il buon accordo tra tale periodo e quello teorico di marea semi-diurna, è per il prof. De Marchi la rivelazione che « le osservate ondulazioni sono « vere onde di marea, che al passaggio sotto uno strato di acqua più dolce « accentuano notevolmente la loro ampiezza e rallentandosi sensibilmente, di- « minuiscono sensibilmente di lunghezza ». Egli perciò esclude che dette onde interne abbiano per causa le sesse trasversali, giacchè in tal caso il loro periodo T' calcolato con la formola di Schmidt [2]:

$$T' = 2l \sqrt{\frac{\frac{\varrho_i}{h_i} + \frac{\varrho_s}{h_s}}{ng(\varrho_i - \varrho_s)}} \tag{3}$$

verrebbe poco meno di tre volte tanto.

Prima di accettare questa conclusione, ho voluto esaminare di nuovo il problema.

Abbiamo due strati sovrapposti, i quali costituiscono due sistemi che hanno virtualmente due gradi di libertà e possono prendere due modi indipendenti di oscillazione intorno lo stato d'equilibrio. Cosa accade quando un'onda investe i due sistemi?

L'onda li influenza entrambi, ed, attraverso modificazioni del moto dei due, dovute al reciproco vincolo, appare un terzo sistema a lungo periodo.

I moti vincolati dei due primi sistemi, fluido superiore e fluido inferiore, possiamo scriverli sotto la forma:

$$x_s = x_s^\star \sin \frac{2\pi}{T_s^\star} t \qquad x_i = x_i^\star \sin \left(\frac{2\pi}{T_i^\star} t + \beta \right) \tag{4}$$

dove β è una differenza di fase costante.

[1] H. Lamb, *Hydrodynamics*, terza ed. 1906, pag. 354, University press, Cambridge.

[2] W. Schmidt, *Stehende Schwingungen in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten.* Sitz. ber. der math. naturw. Cl. der k. Ak. der Wiss., 117 Bd., 1908, Wien.

Possiamo anche scriverli così:

$$(4^{bis}) \qquad \begin{cases} x_s = x_s^\star \sin\left(\dfrac{\dfrac{2\pi}{T_s^\star}+\dfrac{2\pi}{T_i^\star}}{2}\,t+\dfrac{\dfrac{2\pi}{T_s^\star}-\dfrac{2\pi}{T_i^\star}}{2}\,t\right) \\ x_i = x_i^\star \sin\left(\dfrac{\dfrac{2\pi}{T_s^\star}+\dfrac{2\pi}{T_i^\star}}{2}\,t-\dfrac{\dfrac{2\pi}{T_s^\star}-\dfrac{2\pi}{T_i^\star}}{2}\,t+\beta\right) \end{cases}$$

Le (4^{bis}) rappresentano i moti dei due primi sistemi aventi un egual periodo:

$$\frac{2}{\dfrac{1}{T_s^\star}+\dfrac{1}{T_i^\star}}$$

ed una differenza di fase $\left(\dfrac{2\pi}{T_s^\star}-\dfrac{2\pi}{T_i^\star}\right)t-\beta$ variabile col tempo.

Ne segue che i moti saranno ora concordanti ed ora dissonanti e l'intervallo di tempo, perchè i movimenti siano o non siano concordanti, verrà espresso dalla

$$(5) \qquad \theta = \frac{T_s^\star\, T_i^\star}{T_s^\star - T_i^\star}.$$

Sorge quindi nei due fluidi una terza ondulazione a periodo θ tanto più lenta, quanto minore è la differenza $T_s^\star - T^\star$. Il modo col quale abbiamo ricavato θ, esclude si possa avere la propagazione lenta, senza una prima e seconda ondulazione rapida di cui essa è la conseguenza (1).

I moti in un piano verticale normale alla sezione rappresentata dalla figura, hanno analogie con quelli del sistema che si può realizzare dal complesso di due pendoli verticali sovrapposti. Se applichiamo ai due pendoli, inferiore e superiore, gli indici i ed s ed indichiamo con T, l ed m il periodo avanti l'accoppiamento, la lunghezza e la massa, dopo l'accoppiamento si trova:

$$(6) \qquad T_i^\star = T_i\left(1+\tfrac{1}{2}\,\frac{\dfrac{m_s}{m_i}\,l_s}{l_i-l_s}\right) \quad ; \quad T_s^\star = T_s\left(1-\tfrac{1}{2}\,\frac{\dfrac{m_s}{m_i}\,l_i}{l_i-l_s}\right)$$

nell'ipotesi che $\dfrac{m_s}{m_i}$ sia molto piccolo (2). Pel fatto che i due periodi $T_i^\star$

(1) Se i due primi sistemi non fossero reciprocamente vincolati, il terzo sistema a lungo periodo sarebbe irreale o stroboscopico.

(2) A. Garbasso. *Vorlesungen über Spektroskopie*, Leipzig, J. A. Barth, 1906, pag. 65; idem. *La struttura degli atomi materiali*. Atti della Soc. It. per il progresso delle scienze. Riunione, 1908, pag. 123.

e $T_s^\star$ non vengono identici, si rivela in ogni pendolo il fenomeno dei battimenti, la cui durata corrisponde all'espressione (5) già detta, ossia al lento periodo del terzo sistema.

Anche nel caso idrodinamico, è molto piccolo il rapporto

$$\frac{m_s}{m_i} = \frac{8.1 \times 1.021}{21.9 \times 1.027} = 0.36$$

e possiamo adattare ad esso le formole (6) e (5). Basteranno calcoli approssimati, essendo la nostra una dimostrazione e non una misura assoluta.

I liquidi inferiore e superiore, se soli, avrebbero oscillato coi periodi:

$$(7) \qquad T_i = \frac{l}{4\sqrt{g h_i}} = 1689^s \quad ; \quad T_s = \frac{l}{4\sqrt{g h_s}} = 2778^s .$$

Per le lunghezze l_i ed l_s metto le cifre che corrispondono ai periodi delle (7). Avremo:

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{l_s}{l_i - l_s} = \dfrac{h_s}{h_i - h_s} = \dfrac{T_i^2}{T_s^2 - T_i^2} = 0.59 \\ \dfrac{l_i}{l_i - l_s} = \dfrac{h_i}{h_i - h_s} = \dfrac{T_s^2}{T_s^2 - T_i^2} = 1.59 \end{cases}$$

Le (6) forniscono

$$(6^{bis}) \qquad \begin{cases} T_i^\star = 1689\,(1 + \frac{1}{2}\,0.36 \times 0.59) = 1865^s \\ T_s^\star = 2778\,(1 - \frac{1}{2}\,0.36 \times 1.59) = 1950^s \end{cases}$$

Ed avremo per la (5)

$$\theta = 42.500^s .$$

Ripetuto il ragionamento per tutte le sezioni verticali, si arriva ad un'onda per cadun liquido, del periodo θ, sfasate tra loro di 180°. Tale periodo è quello del terzo sistema lento, che troviamo corrispondere al periodo T della (1^{bis}), quale ottenemmo sostituendo alle lettere le identiche cifre rispettive.

Il fenomeno che nei pendoli è di battimento, viene nel caso idrodinamico mascherato dal moto fluido discontinuo della superficie comune.

Le velocità corrispondenti alle onde dei due primi sistemi rapidi, a periodo di 1865 e 1950^s, ottengo rispettivamente colla formola (1):

$$(9) \qquad V_i = \frac{l}{4\,T_s^\star} = 13{,}4 \quad ; \quad V_s = \frac{l}{4\,T_i^\star} = 12{,}8 \ {}^m/_s.$$

La velocità del sistema lento vale la differenza:

$$V_i - V_s = 0{,}6 \ ^m/_s ,$$

e corrisponde al valore V della formola (2) di Stokes e Lamb.

Figura un'onda del periodo di 42.500^s, ma l'oscillazione è dovuta a concomitanti oscillazioni, di periodi molto più brevi, nei due fluidi sovrapposti. Abbiamo l'onda del sistema lento che viaggia colla velocità di 0,6 $^m/_s$ ma è una velocità differenza delle grandi velocità che hanno le onde dei due primi sistemi. Mentre l'A. ritiene trattarsi di un'onda di marea che avanza lentissima per l'Alto Adriatico, si tratta invece di un'onda differenziale, conseguenza di onde, le quali corrono con velocità venti volte circa maggiore [valori delle (9)].

Nella trasversale Venezia-Rovigno sono quattro onde del sistema lento, che a svolgersi impiegano 4×42.500^s. Durante questo intervallo, le onde dei primi sistemi, alle velocità rispettive di 12,8 e 13,4 $^m/_s$ percorreranno 2176 e 2278 Km. La trasversale è solo lunga 100 Km, ne consegue che dette onde la percorreranno circa 20 volte in cifra tonda, dando luogo alle onde stazionarie di una sessa quadrinodale.

Tutta l'interpretazione del fenomeno delle onde interne va modificata e ritenuta sostanzialmente diversa da quella data nella citata Memoria.

Respinto il fenomeno della propagazione, ed accettato quello di sessa (1), raddoppia la lunghezza d'onda, che da $\lambda = \frac{l}{4}$ va a $\lambda = \frac{2l}{4} = 50.000^m$; raddoppiano i periodi dei primi sistemi, cosicchè da 1907^s [media delle (6^{bis})] $= 32^{mp}$ salgono a $\frac{2l}{4V} = 64^{mp}$; e raddoppia il periodo θ del terzo sistema lento, che da 42.500^s va a 85.000^s; questa volta in ottimo accordo colla formola teorica (3) che W. Schmidt propose per le sesse.

Ai tempi della figura, il primo stadio della propagazione è già superato e siamo a quello delle onde stazionarie, a nodi migratorî.

Nello strato superiore, dei quattro nodi, uno è alle estremità della trasversale e gli altri tre sono indicati nella figura alle lettere $N_s' \ N_s'' \ N_s'''$. Sempre nello strato superiore, nell'area centrale che ha all'incirca la forma di una lemniscata ed è nella figura occupata dal liquido a densità uniforme poco inferiore ad 1.022, le due ali A′ ed A″ della lemniscata sono i ventri

(1) La causa della sessa è qui fuori discussione; probabilmente sta in relazione alle agitate condizioni meteoriche di quei giorni. Dalla mezzanotte del 16 al 17 soffiò vento fresco del primo quadrante, che si mantenne tutto il 17, assumendo nelle ore meridiane forza da 4 a 6 e determinando un mare così grosso da costringere la spedizione austriaca sulla Najade a sospendere le sue osservazioni lungo la trasversale Ravenna-Lussimpiccolo.

dell'onda lenta (periodo 85.000^s) inviluppo delle onde relativamente rapide (periodo 2×1950^s) che andarono e tornarono lungo la superficie inferiore dello strato superiore.

Nello strato inferiore vediamo i nodi alle lettere N_i' N_i'' N_i'''. Le zone B′ e B″ accennano ai ventri di un'onda lenta (periodo circa 85.000^s) inviluppo d'onde relativamente rapide (periodo 2×1865^s) che andarono e tornarono lungo la superficie superiore dello strato inferiore.

I ventri A′, A″ dell'onda inviluppo superiore sono sfasati di 180°, cioè in opposizione di fase su quelli B′, B″ dell'onda inviluppo inferiore, ad un intervallo eguale a circa $\theta/2 = 42.500^s$.

Non credo che le ampiezze massime delle onde abbiano occupato lo spazio che i ventri accennano nella figura. Essi sono in parte il risultato della convettività. Anche oscillazioni piccole bastano a rimescolare le masse liquide. Il lettore può ricordare quel che capita quando si fa oscillare trasversalmente una corda polverosa tesa orizzontalmente. Si produce ai ventri una nube di polvere, che esagera l'ampiezza reale d'oscillazione della corda. Nella figura l'uniformità della densità indica il rimescolìo ai ventri, mentre ai nodi sussiste il gradiente di densità proprio di quel tempo. Ai nodi le densità vanno rapidamente decrescendo verso l'alto. È 1.024 a 10^m di profondità, 1.021_4 a 5^m, 1.0207 alla superficie. Il valore della densità nei ventri (0.021_8) è la media circa delle densità che sovrastano e sottostanno ai nodi.

Il risultato del mio studio è, in conclusione, contrario all'affermazione fatta dal Petterson (1), e sostenuta dal prof. De Marchi, che le ondulazioni nello strato di salto siano onde progressive provenienti da maree di alto mare. La soluzione, quale in questa Nota ho proposto, appoggia invece le idee di John Murray (1) e di L. M. Wedderburn (1) che si tratti di sessa.

Sussistesse anche la risonanza tra il periodo lento del terzo sistema e l'onda diurna di marea, dovrebbe nondimeno, il fenomeno delle onde interne, considerarsi di sessa, giacchè furono le onde di sessa a generare le onde lente.

Pur non avendo ricorso alle formole più esatte del Chrystal, abbiamo trovato che il periodo della sessa fu di 64^{mp} circa. Ora risulta da tre mie pubblicazioni (*) che i periodi delle sesse non sono innumeri, ma si stringono attorno a cifre tra loro legate da relazioni, che sono un bell'esempio dell'armonia che regge i fenomeni cinematici del mare. Ad esempio Pola e Venezia mostrano un periodo di 30 a 31^{mp} e Venezia anche quello di 60^{mp}.

(1) O. Krümmel, *Handbuch der Ozeanographie*, vol. II, cap. IX, J. Engelhorns, Stuttgart, 1911.

(*) E. Oddone, *Il problema delle ondulazioni secondarie di mare e delle sesse*, Boll. Soc. Sismol. It., vol. XII. 1908: idem, *Per lo studio delle cause del fenomeno delle sesse*, questi Rendiconti, vol. XIX, fasc. 3°, 1910: idem, *Alcune osservazioni idrodinamiche su di un piccolo modello di mare Adriatico*. Ann. dell'Uff. Centr. di Meteorol. e Geod., vol. XXXII. Parte I^a. 1910.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. I fenomeni di adattamento nelle rane esculente ibernanti.* Nota VII di Bruno Brunacci, presentata dal Socio L. Luciani.

Avendo riferiti i fatti che si osservano durante l'adattamento delle rane esculente estive all'ambiente liquido esterno di varia concentrazione, riferisco i risultati delle esperienze eseguite sull'adattamento delle *rane esculente ibernanti*. A tale scopo nel mese di ottobre ho conservato per l'inverno circa 500 rane. Ma mentre metà di esse furono tenute entro una grande vasca di terra cotta nella quale era stata posta della terra mantenuta umida facendovi pervenire sempre un po' d'acqua; l'altra metà fu fatta svernare invece dentro una cassetta di legno sul fondo della quale era stato messo uno strato di borraccina spruzzata ogni tanto con un po' di acqua. Delle rani svernanti entro la vasca di terra cotta, verso il principio di febbraio ne erano morte più di un terzo; di quelle invece tenute nella cassetta con la borraccina erano sopravvissute un numero molto maggiore.

Le rane conservate tra la terra umida si presentavano secche: stimolate adeguatamente, mostravano il caratteristico riflesso tonico diffuso (aumentata sensibilità dolorifica); i loro sacchi linfatici erano vuoti di liquido. La vescica era invece ripiena di urina. Il sangue usciva con difficoltà dai vasi tagliati, era molto scuro e formava un abbondante coagulo. Da circa 50 di tali rane ibernanti si raccolse l'urina e il sangue che venne difibrinato con palline di vetro. Per avere poi un'idea dell'ambiente nel quale le rane avevano svernato, ho fatto una soluzione satura della terra posta nella vasca e ne ho determinato il Δ.

Nella tabella 10ª serie *H*, sono riportati i dati analitici riferentisi sia alle rane provenienti dalla terra umida, sia di quelle che avevano svernato tra la borraccina. Queste ultime non si mostravano secche, stimolate, non davano quasi mai luogo al riflesso tonico diffuso. Da esse si otteneva abbondante quantità di sangue, il quale era parimenti molto scuro e formava un ricco coagulo. Avevano l'urina in vescica, ma molto più scarsa che le rane tenute nella vasca colla terra. Nei loro sacchi linfatici non vi era liquido. Il cuore pulsava lentamente. Lo stomaco e l'intestino erano vuoti.

Confrontando i dati analitici relativi a queste rane con quelli concernenti le precedenti, si vede che il sangue delle prime ha una concentrazione molecolare superiore a quello delle seconde ($\Delta = 0°{,}650$ e $\Delta = 0°{,}570$),

così pure si osserva che l'orina è più concentrata. Risulta inoltre da tali analisi che *il sangue delle rane ibernanti ha sempre una concentrazione molecolare superiore a quello delle rane estive.*

Dopo avere osservati i fenomeni constatabili nelle rane svernanti tra la terra umida e tra la borraccina, posi una parte delle prime e una parte delle seconde in due recipienti separati nei quali era stata messa acqua distillata che veniva mutata tre o quattro volte al giorno. Dopo parecchi giorni di permanenza nell'acqua distillata si osservava che esse avevano perduto quel grado di iperestesia che le faceva porre in riflesso tonico quando fossero state stimolate adeguatamente. Scompariva quasi del tutto l'orina dalla vescica; il sangue esciva più abbondantemente dai vasi tagliati, era meno denso, scuro e facilmente coagulabile. I risultati delle analisi eseguite su tali rane sono riportati nella tabella 11ª serie *I*. Da essi si rileva come anche le rane ibernanti tenute in acqua distillata riportino la concentrazione molecolare del loro sangue a quello stesso livello di circa $\Delta = 0°,450$ che è caratteristico delle rane esculente estive tenute del pari in acqua distillata.

Poichè dalle esperienze eseguite sulle rane estive si era visto che esse non riuscivano a mantenersi lungamente in vita in una soluzione Ringer contenente l'11 $^0/_{00}$ di cloruro di sodio; così ho voluto provare se le rane ibernanti fossero riuscite a resistere ad una soluzione Ringer più concentrata di quella che per le rane estive avevo chiamato *ultramussima* (soluzione Ringer contenente l'11 $^0/_{00}$ di NaCl). Ho scelto perciò una soluzione contenente il 12 $^0/_{00}$ di NaCl, più gli altri sali in proporzione, e vi ho messo 30 rane di quelle che avevano svernato in borraccina. Dopo cinque giorni di permanenza in tale soluzione ne erano morte sei. Le altre si presentavano torpide nei movimenti. Il colorito della loro pelle era grigiastro. Stimolate adeguatamente presentavano il fenomeno del riflesso tonico diffuso. Nei loro sacchi linfatici si trovava pochissima linfa, la quale aveva un colore giallo-ambra chiaro. Il sangue rosso-scuro esciva facilmente dai vasi tagliati e coagulava con rapidità. La vescica era per lo più vuota di urina; o se ve ne era, essa si presentava piuttosto densa e di colore giallo-verdastro. Lo stomaco e l'intestino erano pieni di acqua ed aria.

Le analisi praticate sul sangue, sulla linfa dei sacchi e sull'orina sono riportati nella tabella 12ª ser. *L*.

Da esse risulta che le *rane ibernanti riescono meglio di quelle estive a vivere in ambienti salini più concentrati ed a regolare con essi la pressione osmotica del loro sangue.*

Dopo quanto ho riferito relativamente alle esperienze eseguite su le rane ibernanti, ho voluto, a simiglianza di quanto avevo fatto per le rane estive, cercare di conoscere *in quanto tempo le rane esculente ibernanti sarebbero state capaci di adattarsi all'ambiente salino ipertonico.* Nelle esperienze eseguite in questo senso ho adoperato la soluzione Ringer della

stessa concentrazione di quella usata per le rane estive (soluzione contenente il 10 ‰ di NaCl più gli altri sali in proporzione).

La tabella 13ª serie *M.* dimostra che dopo 12 ore l'adattamento non era ancora avvenuto. Ricordando ora come le rane estive poste nella stessa soluzione riescissero già entro le prime 8. o 9 h. non solo a raggiungere il livello di concentrazione molecolare iniziale dell'ambiente esterno, ma anche a sorpassarlo (cfr. Nota IV), si vede chiaramente come *nelle rane ibernanti i fenomeni di adattamento siano molto più lenti*. Inoltre si è rilevato in tali esperimenti che dopo le prime 12 h. di permanenza delle rane in soluzione ipertonica il colore della loro pelle resta quasi immutato e che nei sacchi linfatici non si trova quasi punta linfa.

Solo circa dopo 58 h. le rane cominciano a presentare cambiato il colore della pelle e si comincia ad accumulare linfa nell'interno dei loro sacchi linfatici. Dopo 132 h. la linfa era abbondante, densa, di colore giallo ambra, non coagulava spontaneamente con facilità. Il sangue era oscuro, denso, facilmente coagulabile. Lo stomaco talora era vuoto, tal'altra conteneva acqua, muco ed aria. L'intestino era per lo più ripieno di acqua e bile, così pure piena di bile densa era la loro cloaca. La cistifellea era piena di bile. I polmoni si presentavano molto meno distesi che nelle rane estive, così pure molto meno accentuati erano i fenomeni dolorifici (riflesso tonico).

Tutto ciò dimostra come nelle rane ibernanti tutti i fatti concomitanti al fenomeno dell'adattamento all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione osmotica dei loro liquidi interni avvengano molto più lentamente che nelle rane estive poste nelle medesime condizioni: e che esse sono inoltre più resistenti alle soluzioni ipertoniche (1).

(1) Avrei voluto completare le ricerche sul tempo entro il quale ha luogo l'adattamento delle rane ibernanti alle soluzioni ipertoniche, ricordando come avvenisse per quelle estive, in quanto tempo esse avrebbero potuto ritornare al livello normale, quando, dalla soluzione ipertonica, fossero state poste in acqua corrente di fonte, ma mi è venuto a mancare il materiale necessario a ciò.

Serie H

Tabella 10ª.

Rane esculente inbernanti, tenute a svernare in terra umida e in borraccina.

Numero e data		Δ	$R_{22°}$ (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni
1. 19 febbr. 1913	[Liquido ambiente] * . .	[0°,170]	—	—	—	—	—	Rane portate in laboratorio nei primi di novembre. Tenute a svernare per varî mesi entro una vasca di terracotta nella quale si era messa terra umida. Allo scuro. Temperatura ambiente circa 10° C.
	Sangue defibrinato	0,650	46	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0,610	32	—	5,055	0,435	4,620	
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	0,625	45	0,700	—	—	—	
2.	Liquido ambiente		—	—	—	—	—	Rane portate in laboratorio nei primi di novembre. Tenute a svernare per varî mesi dentro una cassetta di legno con *borraccina*.
	Sangue defibrinato	0,570	46	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0,550	31	—	5,619	0,495	5,124	
	Linfa defibrinata				—	—	—	
	Urina	0,520	29	0,327				

[* Per avere un'idea della solubilità del terreno, si mette la terra nella quale hanno svernato le rane entro un recipiente con acqua fino ad averne una soluzione satura. Si ottiene così una soluzione che ha un $\Delta = 0°,170$].

Serie I

TABELLA 11ª.

Rane esculente ibernanti, tenute in acqua distillata, dopo aver svernato o in terra umida (1) *o in borraccina* (2).

Numero e data		Δ	$R_{22°}$ (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	*Osservazioni*
1.	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	Rane che hanno svernato in terra umida, si mettono in acqua distillata e vi si lasciano *7 giorni*, mutando l'acqua 3 volte al giorno.
	Sangue defibrinato	0,430	47	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0,450	34	—	3,448	0,389	3,059	
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	0,055	—	—	—	—	—	
2.	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	Si mettono 24 rane che hanno svernato in borraccina, nell'acqua distillata e si fanno stare parecchi giorni cambiando l'acqua 3 volte al giorno.
	Sangue defibrinato	0,465	47	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0,465	33	0,588	3,266	0,253	3,013	
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	—	—	—	—	—	—	

Serie L

TABELLA 12ª.

Rane escul. ibernanti, tenute in soluzione Ringer molto ipertonica (NaCl gr. 12 ‰ + gli altri sali in proporzione).

1.	Liquido ambiente	0,795	15,5	—	—	—	—	Si mettono 30 rane di quelle che hanno svernato in borraccina, in soluzione Ringer molto ipertonica (NaCl gr. 12 ‰ + gli altri sali in proporzione) e vi si lasciano stare *5 giorni*. Allo scuro. Temperatura ambiente circa 10° C.
	Sangue defibrinato	0,830	26	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0,830	19	0,658	4,032	0,462	3,570	
	Linfa dei sacchi defibrin.	0,825	17	0,293	2,202	—	—	
	Urina	0,815	non basta!	0,132	—	=	—	

Serie **M**

Tabella 13ª.

Rane esculente ibernanti. Il tempo entro il quale ha luogo l'adattamento alla soluzione ipertonica.

Numero e data		Δ	$R_{22°}$ (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	*Osservazioni*
1. Dopo 12 ore	Liquido ambiente	0,655°	—	—	—	—	—	Si mettono alcune rane che hanno svernato in borraccina, in soluzione Ringer ipertonica (NaCl gr. 10 ‰ + gli altri sali in proporzione) (dopo averle fatte stare tre giorni in acqua corrente di condotta), allo scopo di vedere in quanto tempo avviene l'adattamento. Allo scuro. Temperatura ambiente circa 10° C.
	Sangue defibrinato	0,555	—	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	—	—	—	2,819	0,304	2,515	
	Linfa dei sacchi defibrin.	—	—	—	—	—	—	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
2. Dopo 34 ore	Liquido ambiente	0,690	—	—	—	—	—	
	Sangue defibrinato	0,675	—	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	—	—	—	3,249	0,412	2,837	
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
3. Dopo 132 ore	Liquido ambiente	0,640	—	—	—	—	—	
	Sangue defibrinato	0,690	—	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	—	—	—	3,044	0,477	2,567	
	Linfa defibrinata	0,695	—	0,302	1,883	0,427	1,456	
	Urina	non basta!	—	0,375	—	—	—	

Parassitologia. — *Esperienze di lotta contro le tignuole della vite.* Nota del dott. Mario Topi, presentata dal Socio B. Grassi.

Mi ero proposto di ripetere quest'anno le esperienze di trattamenti insetticidi contro le tignuole della vite su un numero considerevole di viti, svolgendo un piano razionale di lotta con lavori invernali e trattamenti primaverili ed estivi, e cercando di trarne conclusioni esatte ed accertate sulla convenienza economica della lotta, anche da parte di un solo e piccolo proprietario. Le condizioni dell'attuale momento mi hanno però costretto, specialmente per la deficienza di mano d'opera, a varî ripieghi e limitazioni nel piano dei lavori, per cui l'esperienza, salvo per il maggior numero delle viti trattate, si è su per giù mantenuta nei limiti delle precedenti, eseguite nella stessa zona.

Ad Alice Bel Colle, in una vigna in cui predomina la coltivazione del *moscato*, venne determinata una porzione, in complesso di uniforme vegetazione, comprendente mille viti circa; i trattamenti insetticidi e le operazioni che saranno appresso indicate vennero fatte su queste 1000 viti; le altre viti della vigna avrebbero servito da testimoni.

Verso la metà di settembre 1915, sul tronco, a varia altezza, o sulle canne dell'impalatura di ognuna di queste mille viti si applicarono una o più fascie di varia sorta: vennero adoperati principalmente stracci di stoffa e foglie e brattee di granturco; queste fasce avrebbero dovuto servir di rifugio alle larve di tignuole che, abbandonando il grappolo per incrisalidarsi, si sarebbero altrimenti ricoverate sotto le corteccie del tronco.

Nel gennaio 1916 vennero tolte e portate via dalla vigna tutte queste fasce; inoltre, a tutte le canne, che sarebbero rimaste anche per quest'anno nell'impalatura delle 1000 viti, venne tolto con le forbici l'ultimo internodio, nel quale si nascondono, pure per incrisalidarsi, le larve delle tignuole.

Era intenzione verificare in tutto questo materiale (fasce e pezzi di canna, egualmente asportati dalla vigna) quale fosse la frequenza delle crisalidi di tignuole e di determinare la percentuale di quelle sane, per farci un concetto approssimativo della quantità di farfalle di prima generazione che veniva così ad essere tolta dal vigneto. Ma purtroppo quel materiale non potè essere esaminato che in piccolissima parte; in questa, le crisalidi erano tutt'altro che frequenti.

Alle stesse 1000 viti vennero fatti in primavera due trattamenti insetticidi con l'arseniato di piombo ed in estate due trattamenti con l'estratto

di tabacco. Tutti i trattamenti sono stati applicati con la pompa da solfato di rame, munita di getto intermittente e cercando di colpire a preferenza i grappoli, senza tuttavia esigere dall'operaio incaricato una eccessiva accuratezza, appunto per porci nelle condizioni possibili di praticità.

Il primo trattamento venne fatto il 15 maggio, adoperando la soluzione del solo arseniato di piombo in acqua, alla dose di 800 grammi per ettolitro.

Il secondo trattamento venne effettuato il 30 maggio, adoperando un kg. di arseniato di piombo ed unendolo ad un ettolitro della ordinaria poltiglia bordolese. Per aumentare l'adesività si aggiunsero anche circa 100 grammi di caseina per ettolitro di poltiglia.

Il terzo trattamento, contro la generazione estiva, venne effettuato il 19 luglio, con l'estratto di tabacco alla dose del 2 %. Si aggiunsero anche due ettogrammi di sapone molle di potassa. Prima di questo trattamento il proprietario aveva proceduto ad una leggera sfogliatura, allo scopo di scoprire meglio i grappoli, in tutta la vigna. A quest'epoca, nella porzione di viti in esperimento, le uova delle tignuole erano rarissime; in un quarto d'ora di ricerche non ne abbiamo trovate che due. Nella parte più bassa della vigna, fuori della parte in esperimento, le uova erano un po' più frequenti: qualche piccolissima larva di *Conchylis* era già penetrata entro l'acino.

Il quarto ed ultimo trattamento venne effettuato il 31 luglio, con l'estratto di tabacco e sapone alle dosi sopra indicate. A quest'epoca si vedevano, tanto nella parte del vigneto sottoposta ai trattamenti quanto nella parte testimone, larve penetrate entro gli acini, ma in piccol numero. Scarse sempre le uova.

In questo stesso giorno, dietro invito del compianto prof. E. Voglino, facemmo anche, in un'altra vigna, un'esperienza con l'arseniato di piombo in polvere. Venne trattato un intero filare di viti col solfo ramato contenente il 5 % di arseniato di piombo; questo trattamento fu unico.

Come nelle esperienze precedenti, l'esame dei risultati venne fatto raccogliendo tutti gli acini più o meno erosi o guasti di una o più viti, sia sottoposte ai trattamenti insetticidi, sia rimaste senza alcun trattamento, e contando in questi acini le larve delle tignuole presenti, distinguendole a seconda della specie.

La scelta delle viti venne fatta in modo che la quantità di uva che portavano fosse approssimativamente eguale nelle viti trattate ed in quelle di controllo.

Si è avuto cura di scegliere le viti, trattate e non, nello stesso filare, perchè, come è noto, la quantità dei parassiti e la proporzione relativa delle due specie di tignuole varia molto a seconda che si fanno ricerche in basso od in alto di una vigna situata in zona collinare.

La raccolta degli acini venne fatta il 28 agosto.

Ecco i risultati delle ricerche compiute dove si effettuarono l'applicazione delle fasce, la spuntatura delle canne, due trattamenti primaverili con l'arseniato di piombo e due estivi con estratto di tabacco:

Vigneti	Viti trattate						Viti non trattate					
	N° delle viti	N° dei grappoli	Acini guasti ed erosi	Larve viventi			N° delle viti	N° dei grappoli	Acini guasti ed erosi	Larve viventi		
				Eudemis	Cochylis	Totale				Eudemis	Cochylis	Totale
Mossato . .	2	46	170	16	2	17	2	46	856	49	10	59
Dolcetto . .	1	27	88	4	3	7	1	26	218	41	7	48
Totali .	3	73	258	19	5	24	3	72	569	90	17	107

Facciamo seguire i risultati delle ricerche eseguite nel filare sottoposto ad un unico trattamento di arseniato di piombo in polvere il 31 luglio:

Vigneto	Viti trattate						Viti non trattate						
	N° dei grappoli	Acini guasti ed erosi	Larve viventi				N° dei grappoli	Acini guasti ed erosi	Larve viventi				
			Eudemis	Cochylis	Totale				Eudemis	Cochylis	Indeterminate	Totale	
Dolcetto . .	14	284	61	27	88		18	376	42	52	3	97	

Risulta così da queste esperienze che, in un'annata di non forte infezione, come quella del 1916 con le operazioni invernali indicate, due trattamenti primaverili con l'arseniato di piombo e due estivi con l'estratto di tabacco — il tutto fatto senza particolari attenzioni, come potrebbe essere eseguito da qualunque operaio di campagna, ai fossero state date le opportune indicazioni — si è ottenuta una riduzione nel numero delle larve presenti alla fine di agosto variabile dal 71 all'85 %: ad esse corrisponde, alla stessa epoca, una riduzione nel numero degli acini guasti od erosi (anche ammessa la equivalenza del guasto, che invece è sempre di minor grado nelle viti trattate) variabile dal 52 all'84 %.

L'unico trattamento con l'arseniato di piombo in polvere avrebbe determinato la riduzione del 40 %, del numero delle larve e del 21 % del numero degli acini guasti od erosi. Formuliamo però ogni dubbio sull'innocuità di tali trattamenti arsenicali fatti in estate, quando dovessero essere largamente applicati.

Giovemmo alcuni rilievi circa la entità e la variabilità dei danni che le tignuole possono produrre da un anno all'altro.

Le ricerche, come è stato detto, sono state fatte nel comune di Alice Bel Colle (alto Monferrato), sui vitigni ivi principalmente coltivati (*dolcetto, moscato, barbera, lambrusca*), non però sempre nelle stesse vigne.

Nel 1915, annata di forte infezione, furono contate: 164 larve in 14 grappoli (=11,7 per grappolo); 159 larve in 11 grappoli (=14,4 per grappolo); 235 larve in 21 grappoli (=11,1 per grappolo); media: 12,1 per grappolo.

Nel 1916, annata di infezione scarsa o normale, si hanno: 59 larve in 46 grappoli (=1,2 per grappolo); 48 larve in 26 grappoli (=1,8 per grappolo); in località, di regola, molto infetta: 97 larve in 13 grappoli (=7,4 per grappolo); media: 2,4 per grappolo.

Il numero delle larve è in proporzione, naturalmente, del numero degli acini guasti ed erosi: alla fine di agosto, nella zona in esperimento a distanza di circa un mese dalla vendemmia, stanno circa nel rapporto di 1:4; cioè, per ogni larva presente, vi sono da 3 a 4 acini più o meno erosi o guasti. Approssimandosi alla vendemmia, per la maggiore voracità delle larve, per le condizioni climatiche più favorevoli allo sviluppo della *Botrytis cinerea* negli acini attaccati ed in quelli contigui, il numero degli acini guasti, a causa dello stesso numero di larve; deve aumentare considerevolmente.

Non essendo stati fatti i rilievi tutti gli anni nelle stesse vigne, nè alla stessa epoca, nè sugli stessi vitigni, non è possibile dire finora con sicurezza se la percentuale relativa delle due tignuole si mantenga, o se l'una specie si sviluppi a detrimento dell'altra, come si è creduto rilevare altrove [1]. Sembra tuttavia da escludere finora una decrescenza dell'invasione della *Conchylis* a profitto dell'*Eudemis*.

Egualmente non mi è dato decidere se l'una o l'altra specie preferiscano l'uno o l'altro dei vitigni più estesamente coltivati nella località; le differenze che si notano sembrerebbero finora più riferibili alla situazione del vitigno stesso (località più o meno ventilata, più o meno umida ecc.) che ad una predilezione della tignuola per l'una varietà di vitigno piuttosto che per l'altra.

Chimica fisiologica. — *Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia.* III: *Impiego della microtitolazione nella ricerca dell'arginasi* [2]. Nota del dott. A. Clementi, presentata dal Corrisp. D. Lo Monaco.

L'utilità dell'impiego della microtitolazione al formolo nelle ricerche sull'*arginasi* si comprende facilmente, quando si considerino le grandi difficoltà, che presenta la preparazione di quantità, anche minime, di *argi-*

[1] Cfr. Chauvignè in *Revue de Viticulture*, 5 ottobre 1916.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

nina; l'arginina, infatti, non si trova in commercio e per prepararla allo stato chimicamente puro bisogna idrolizzare con acido solforico l'edestina e procedere all'isolamento delle basi esoniche dai prodotti di idrolisi mediante il metodo della precipitazione con nitrato d'argento di Kossel e Kutscher; questo, come è noto (1), non permette di lavorare con una quantità di edestina superiore a 150 gr. da cui non si possono ricavare più di 10 gr. di carbonato di arginina.

Il mio metodo volumetrico (2) per la ricerca dell'*arginasi*, consistente nella determinazione quantitativa dei gruppi aminici liberi dell'*arginina* prima e dopo l'azione del fermento, si fonda sul fatto, da me dimostrato per la prima volta (3), che i sali dell'*ornitina*, che si origina dalla scissione idrolitica dell'arginina, si comportano nella titolazione al formolo di Sörensen come acidi dibasici, poichè reagendo la formaldeide con ambedue i gruppi aminici liberi dell'ornitina viene messa in evidenza non solo la funzione acida del gruppo carbossilico dell'aminoacido, ma anche la funzione acida del gruppo ossidrilico dell'acido inorganico, secondo il seguente schema:

$$\begin{array}{l} \overline{CO.OH} \\ | \\ CH.NH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2.NH_2 \\ CH_2.NH_2 \end{array} H_2SO_4 + 4CH_2O = \begin{array}{l} \overline{CO.OH} \\ | \\ CH.N=CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2.N=CH_2 \\ CH_2.N=CH_2 \end{array} + 4H_2O + \overline{H_2SO_4}$$

$$\begin{array}{l} | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH.NH_2 \\ | \\ \underline{CO.OH} \end{array} \qquad \begin{array}{l} | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH.N=CH_2 \\ | \\ \underline{CO.OH} \end{array}$$

(Solfato di ornitina) (Formaldeide) (Combinazione metilenica dell'ornitina)

Dato un siffatto fondamento teorico del metodo da me elaborato per la ricerca dell'arginasi, l'impiego della *microtitolazione* si presenta teoricamente possibile.

(1) Kossel und Kutscher, *Beiträge zur Kenntniss der Eiweiss-Körpern*. Zeitsch. f. Physiol. Chemie, *31*, 1900.

(2) Clementi A., *Ueber die Verbreitung der Arginase im Tierwelt*. 9° Congresso Internazionale dei Fisiologi del 1913 a Groningen. Archivio di Fisiologia XII.

(3) Id., *Un nuovo metodo titrimetrico per la ricerca dell'arginasi*. Rendic. della R. Accad. dei Lincei, Cl. sc. fis., XXIII, 1914.

La dimostrazione pratica di tale applicazione e dei risultati che se ne possono ottenere è data dalle cifre, che sono qui sotto riportate:

I. *Microtitolazione del solfato di arginina.* — Di una stessa soluzione di solfato di arginina contenente gr. 0,8 % di arginina furono prelevati due campioni: il primo di 5 cm³ richiese per la macrotitolazione al formolo cm³ 1,15 di soluzione $NaOH\ \frac{1}{5}n$: il secondo di 0,5 cm³ richiese per la microtitolazione al formolo l'impiego di cm³ 1,20 di soluzione $NaOH\ \frac{1}{50}n$.

II. *Ricerca dell'arginasi nel fegato di Mammifero mediante la microtitolazione*:

(Fegato di embrione umano preso asetticamente) in termostato a 37°, 12 ore con aggiunta di toluolo	Quantità adoperata di $NaOH\ \frac{1}{50}n$ in cm³	Azoto	
		Aminico in mgr.	Totale in mgr.
Solfato di arginina . . . . cm³ 0,5	1,0	0,28	1,12
(1) Solfato di arginina. . . cm³ 0,5 Estratto acquoso di fegato . » 0,5 Acqua . . . . . » 2,0	2,1		
(2) Estratto acquoso di fegato cm³ 0,5 Acqua . . . . . cm³ 2,5	0,1		

			in mgr.	in %
Come ornitina	Calcolato	2,0	Arginina Aggiunta	3,5	100
	Trovato.	2,0	Idrolizzata	3,5	100

L'arginasi è presente nel fegato di embrione umano (3).

(1) Dopo 12 ore di permanenza in termostato il liquido di questo campione era *perfettamente limpido* e presentava *numerosi e piccoli fiocchi* negli strati più bassi.

(2) Dopo la permanenza in termostato il liquido di questo campione era *uniformemente* e lievemente *torbido senza fiocchi.*

(3) Clementi A., *Sulla diffusione nell'organismo e nel regno dei vertebrati e sulla importanza fisiologica dell'arginasi.* Archivio di Fisiologia, vol. XIII, 1915.

III. *Ricerca dell'arginasi nel fegato di Rettile mediante la microtitolazione*:

Fegato di Zamenensis Viridiflavus in termostato a 37°, 48 ore con aggiunta di toluolo	Quantità adoprata di $NaOH\frac{1}{50}n$ in cm³	Azoto	
		Aminico in mgr.	Totale in mgr.
Solfato di arginina . . . . cm³ 0,5	1,0	0,28	1,12
(¹) Solfato di arginina . . . cm³ 0,5 Estratto acquoso di fegato . » 0,5 Acqua . . . . . » 2,0	1,5		
(²) Estratto acquoso di fegato cm³ 0,5 Acqua . . . . . » 2,5	0,5		

		in mgr.	in %
Come ornitina { Calcolato	2,0	Arginina { Aggiunta	3,5	100
Come ornitina { Trovato	1,0	Arginina { Idrolizzata	0	0

Concordemente ai risultati di precedenti ricerche, l'arginasi risulta assente (³) nel fegato di *Zamenensis Viridiflavus*.

Le analisi surriferite dimostrano, che *la microtitolazione al formolo rende possibile eseguire la ricerca dell'arginasi nei tessuti e negli organi, impiegando per ogni analisi pochi milligrammi di arginina.*

(¹) Il liquido di questo campione era perfettamente limpido e presentava negli strati più bassi numerosi e piccoli fiocchi, mentre il liquido dell'altro campione (²) era uniformemente torbido e non conteneva fiocchi o coaguli; questo fatto conferma, che gli aminoacidi, anche se presenti in quantità *assai piccole*, hanno il potere di agevolare e determinare fenomeni di fiocchificazione e di precipitazione negli estratti acquosi di organi, secondo quanto ebbi già a dimostrare (questi Rendiconti, Cl. sc. fis., vol. XXV, 1916) e Archivio di farmacologia sperimentale e scienze affini, vol. XXI); illustrerò diffusamente in un lavoro in corso di pubblicazione, *questa proprietà* fisico-chimica degli *aminoacidi*, così importante dal punto di vista biologico.

(³) Clementi (loc. cit.).

E. M.